1. Es col·loca un satèl·lit de massa m = 2.000 kg a una altura 4 vegades el radi de la terra. No sabem ni la constant de gravitació G ni la massa de la terra M. El radi de la terra és R = 6.400 km i la gravetat a la superfície de la terra és g = 10 m/s^2. Calcula amb aquestes dades:

a) La velocitat lineal i el període del satèl·lit. b) L'energia cinètica i l'energia potencial del satèl·lit.

a) Primer hem de calcular el radi de l'orbita del satèl·lit: $r = R + h = r + 4R = 5R$

El satèl·lit compleix la 2ª llei i la llei de la gravitació universal. Podem escriure:

$$F = ma \rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$ i calcular la velocitat $\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

Tenint present que $GM = gR^2$ (Explicat en el problema 3 de l'examen 01) i que hem trobat que $r = 5R$, ens queda la velocitat:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{5R}} = \sqrt{\frac{gR}{5}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{5}} = 3.577{,}7 \quad m/s$$

Per calcular el peróde, tindrem present que el satèl·lit fa un MCU:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{v}{r} \quad T = \frac{2\pi}{v/r} = \frac{2\pi r}{v}} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi 5R}{v} = \frac{10\pi 6{,}4 \cdot 10^6}{3.577{,}7} = 56.198{,}7 \quad s = 15h \ 36m \ 39s$$

b) L'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2.000 \cdot 3.577{,}7^2 = 1{,}28 \cdot 10^{10} \quad J$

L'energia potencial d'un satèl·lit és:: $\boxed{U_p = -2U_c}$ $U_p = -2U_c = -2 \cdot 1{,}28 \cdot 10^{10} = -2{,}56 \cdot 10^{10} \quad J$

Per trobar la fórmula anterior que relaciona l'energia potencial d'un satè·lit amb la cinètica només cal escriure la fórmula de l'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2$ i substituir la velocitat per l'expressió que hem trobat abans: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Ens dóna $U_c = G\frac{Mm}{2r}$. Comparant aquesta expressió amb la de l'energia potencial: $U_p = -G\frac{Mm}{r}$ veiem la fórmula que hem fet servir.

---

2. Una força de 2.100 N puja un cos de 200 kg des de la superfície de la terra fins a una altura de 1.600 km. Calcula l'energia que ha rebut el cos per aquest treball, la variació de l'energia potencial en anar de la posició inicial a la final, i la velocitat en aquesta posició final. (G = 6,7·10^{-11} S.I. , R = 6.400 km, M = 6·10^{24} kg).

Calculem el treball que rep el cos: $W = F \cdot \Delta y = 2.100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 = 3{,}36 \cdot 10^9 \quad J$

Aquest treball es converteix en energia cinètica i energia potencial.

L'energia potencial inicial és: $U_{p,inicial} = -G\frac{Mm}{R} = -6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{6{,}4 \cdot 10^6} = -12{,}56 \cdot 10^9 \quad J$

Amb la posició final del cos: $r = R + h = 6.400 + 1.600 = 10.000 \quad km = 8 \cdot 10^6 \quad m$

calculem l'energia potencial final: $U_{p,final} = -G\frac{Mm}{r} = -6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{8 \cdot 10^6} = -10 \cdot 10^9 \quad J$

L'energia potencial que ha guanyat el cos és: $\Delta U_p = U_{p,final} - U_{p,inicial} = -10 \cdot 10^9 + 12{,}56 \cdot 10^9 = 2{,}56 \cdot 10^9 \quad J$

La resta serà l'energia cinètica: $U_c = W - \Delta U_p = 3{,}36 \cdot 10^9 - 2{,}56 \cdot 10^9 = 8 \cdot 10^8 \quad J$

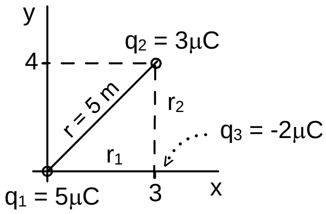
Amb l'energia cinètica, ja podem calcular la velocitat final: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^8}{200}} = 8.828{,}4 \quad m/s$

---

3. Al punt A(0, 0) hi ha una càrrega puntual q_1 = 5 μC. Ara posem una càrrega q_2 = 3 μC al punt B(3, 4) m.

a) Calcula l'energia del conjunt. (1 punt)

b) Si ara posem una tercera càrrega q_3 = – 2 μC al punt C(3, 0) m, calcula l'energia total d'aquest sistema de tres càrregues.



a) Suposem que inicialment només hi ha la càrrega q_1 que crea un camp al seu voltant. Això no suposa cap energia. Aquesta càrrega q_1 crea un potencial al punt (3, 4) m

$$V = k\frac{q_1}{r} = 9{\cdot}10^9\,\frac{5{\cdot}10^{-6}}{5} = 9.000\ \ V$$

Quan hi posarem la càrrega q_2 farem un treball que quedarà en el sistema en forma d'energia potencial elèctrica.

$$U_p = q_2 V = 3{\cdot}10^{-6}{\cdot}9.000 = 0{,}027\ \ J$$

Treball positiu, fet per nosaltres contra la força de repulsió que hi ha entre les càrregues.

b) Ara les dues càrregues q_1 i q_2 creen un potencial al punt (3,0) que serà la suma dels potencials:

$$V_3 = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} = 9{\cdot}10^9\,\frac{5{\cdot}10^{-6}}{3} + 9{\cdot}10^9\,\frac{3{\cdot}10^{-6}}{4} = 15.000 + 6.750 = 21.750\ \ V$$

I quan hi posem la tercera càrrega q_3, tindrà una energia: $U_p' = q_3 V_3 = -(2){\cdot}10^{-6}{\cdot}21.750 = -0{,}0435\ \ J$

És un treball negatiu, fet pel camp elèctric amb la força d'atracció que fan les dues primeres càrregues sobre la tercera.

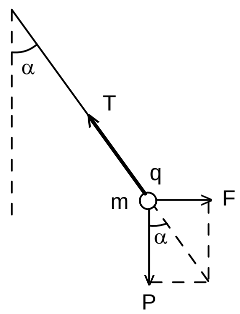
L'energia total serà la suma: $U_{p,total} = U_p + U_p' = 0{,}027 + (-0{,}0435) = -0{,}0165\ \ J$

---

4. Un pèndol elèctric està format per una esfera petita de massa m = 2 g, carregada amb una càrrega q = 4 μC i un fil de longitud l = 1 m. El pengem en una zona on hi ha un camp elèctric uniforme d'intensitat $\vec{E} = (2000,\ 0)$ N/C.

a) Fes el dibuix de totes les forces que rep i calcula els mòduls de totes tres.

b) Si ara tallem el fil, calcula la velocitat i la posició de l'esfera dos segons després i dedueix la trajectòria que fa l'esfera.



a) El pes P, la força elèctrica F i la tensió del fil T. La suma és zero i el pèndol queda en equilibri.

$$P = mg = 0{,}002{\cdot}10 = 0{,}020\ \ N \qquad F = qE = 4{\cdot}10^{-6}{\cdot}2.000 = 0{,}008\ \ N$$

La tensió del fil la podem calcular per Pitàgores:

$$T = \sqrt{P^2 + F^2} = \sqrt{0{,}020^2 + 0{,}008^2} = 0{,}0215\ \ N$$

O per trigonometria, buscant primer l'angle α:

$$\alpha = arctg\,\frac{F}{P} = arctg\,\frac{0{,}008}{0{,}02} = 21'8^o \quad \rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{0{,}020}{\cos 21'8^o} = 0{,}0215\ \ N$$

b) La massa del pèndol es converteix en un projectil que es mou dins d'un espai on hi ha un camp elèctric que li produeix una acceleració horitzontal positiva i, al mateix temps un camp gravitatori que li produeix una acceleració vertical negativa: $a_y = g = -10$ m/s^2 .

Calculem l'acceleració horitzontal produïda pel camp elèctric: $a_x = \dfrac{F}{m} = \dfrac{0{,}08}{0'002} = 4\ \ m/s^2$

El moviment resultant és la composició de dos moviments tots dos uniformement variats.
Les constants són:

Posició inicial: $\vec{r}_o = (0,\ 0)$, velocitat inicial: $\vec{v}_o = (0,\ 0)$, acceleració: $\vec{a} = (4,\ -10)$

I les funcions del temps t:

Velocitat: $\vec{v} = (a_x t,\ a_y t) = (4t,\ -10t)$, posició: $\vec{r} = (\frac{1}{2}a_x t^2,\ \frac{1}{2}a_y t^2) = (2t^2,\ -5t^2)$

Quan t = 2 s, la velocitat és: $\vec{v} = (8,\ -20)\ \ m/s$ i la posició: $\vec{r} = (8,\ 20)\ \ m$

És un projectil que es mou en dues dimensions: el vector de posició l'escriurem així: $\vec{r}\ \left|\begin{array}{l} x = 2t^2 \\ y = -5t^2 \end{array}\right.$

Ara aïllem la t a totes dues i igualem: $t = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ i $t = \sqrt{-\dfrac{y}{5}}$ → $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{y}{5}$ → $y = -2{,}5x$

Veiem que resulta una funció polinòmica de primer grau sense terme independent: y = mx, per tant, la trajectòria és una recta de pendent negatiu que passa per l'origen de coordenades.
Quan es demana la trajectòria d'un mòbil, va bé arribar a una equació del tipus: $y = f(x)$ i així serà fàcil de poder-la identificar.

Per entendre més bé el problema 2, pot anar bé fer primer aquest.

Problema previ al problema 2. Un cos en repòs està situat a una altura inicial y_o = 80 m. Ara li fem una força constant amunt F = 60 N fins que l'altura del cos és y = 120 m. Calcula la velocitat final (quan y = 120 m).

El cos rep un treball: $W = F \cdot \Delta y = 60 \cdot (120 - 80) = 2.400 \;\; J$ que li fa augmentar l'energia potencial i l'energia cinètica perquè li dóna altura i li dóna velocitat.

Podem calcular l'augment d'energia potencial perquè sabem l'altura que puja: $\Delta U_p = mg\Delta y = 2 \cdot 10(120 - 80) = 800 \;\; J$.

La diferència amb el treball rebut serà l'energia cinètica: $U_c = W - \Delta U_p = 2.400 - 800 = 1.600 \;\; J$

Així podem calcular la velocitat: $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1.600}{2}} = 40 \;\; m/s$

Podem comprovar aquest resultat per dinàmica, a partir de l'acceleració, perquè la força F i el pes són constants i, per tant, hi ha un MRUV.

$a = \dfrac{F - P}{m} = \dfrac{60 - 20}{2} = 20 \;\; m/s^2$ i per cinemàtica, calculem la velocitat final: $v = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta y} = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 40} = 40 \;\; m/s$

Això darrer no ho podríem pas fer en el camp gravitatori, quan hi ha distàncies importants per sobre de la superfície de la terra, perquè el pes no és constant i no seria un MRUV. Llavors s'ha de fer sempre per energies.
