1. Una roda comença a girar amb un MCUV i, al cap de 2 segons, va a la seva freqüència normal de rotació que és de 1.200 rpm. Calcula l'acceleració α i el nombre de voltes n que fa en aquests 2 segons.

Primer hem de calcular la freqüència final: $\boxed{f = \frac{n}{t}}$ → $f = \frac{n}{t} = \frac{1.200}{60} = 20 \ rev/s$

I la velocitat angular: $\boxed{\omega = 2\pi f}$ → $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20 = 40\pi \ rad/s$

Ara l'acceleració: $\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t}$ → $\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{40\pi - 0}{2} = 20\pi \ rad/s^2$

Les voltes que fa les podem trobar de dues maneres:

- Amb l'angle recorregut. Ja sabem les tres constants de l'equació de la posició angular: $\varphi_o = 0$, $\omega_o = 0$, $\alpha = 20\pi$.

$\boxed{\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$ → $\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}20\pi t^2 = 10\pi 2^2 = 40\pi \ rad$ → $n = \frac{40\pi}{2\pi} = 20 \ rev$

- Amb la freqüència mitjana: $f_m = \frac{f_o + f}{2} = \frac{0+20}{2} = 10 \ rev/s$ $f_m = \frac{n}{t}$ → $n = f_m t = 10 \cdot 2 = 20 \ rev$

---

2. Un disc horitzontal comença a rodar amb una acceleració angular α = 0,5 rad/s^2. A la distància r = 1 m de l'eix de rotació, hi hem posat un dau. A quin instant el dau és centrifugat del disc? El coeficient de fregament estàtic entre el dau i el disc és μ = 0,4.

La força que fa girar el dau és el fregament estàtic que hi ha entre el dau i el disc:
La força centrípeta va augmentant perquè el dau va augmentant la seva velocitat. Quan la força centrípeta F_c arribi a igualar i sobrepassar la força màxima de fregament estàtic F_f el dau rellisCarà i serà centrifugat del disc.

La força centrípeta és: $\boxed{F_c = ma_n = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r}$ i la de fregament: $\boxed{F_f = \mu mg}$

Igualant F_c i F_f: → $m\omega^2 r = \mu mg$, obtenim la velocitat angular a l'instant de centrifugació: $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 10}{1}} = 0,2 \ rad/s$

I amb l'equació de la velocitat del MCUV: $\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t}$ calculem el temps: $t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{2-0}{0,5} = 4 \ s$

---

3. La posició d'una partícula de massa 3 kg és $\vec{r} = (2t^2 - 2t)\vec{i} - 2t^2\vec{j}$. Calcula, als instants t = 2 s i t = 4 s:

a) La posició, la velocitat, l'acceleració, la quantitat de moviment o moment lineal i l'energia cinètica.
b) La força que actua sobre la partícula i comprova que es compleixen tots dos teoremes de transformació.

Derivant respecte al temps, trobarem la velocitat: $\vec{v} = (4t-2)\vec{i} - 4t^2\vec{j}$ i l'acceleració: $\vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ (constant)

- Per t = 2 s: la posició: $\vec{r} = (4, \ -8) \ m$, la velocitat: $\vec{v} = (6, \ -8) \ m/s$, l'acceleració: $\vec{a} = (4, \ -4) \ m/s^2$

la quantitat de moviment: $\vec{p} = m\vec{v} = 3(6, \ -8) = (18, -24) \ kgm/s^2$,

l'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3(6^2 + 8^2) = 150 \ J$,

- Per t = 4 s: la posició: $\vec{r} = (24, \ -32) \ m$, la velocitat: $\vec{v} = (14, \ -16) \ m/s$, l'acceleració: $\vec{a} = (4, \ -4) \ m/s^2$

la quantitat de moviment: $\vec{p} = m\vec{v} = 3(14, \ -16) = (42, -48) \ kgm/s^2$,

l'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3(14^2 + 16^2) = 678 \ J$

b) La força és constant: $\vec{F} = m\vec{a} = 3(4,\ 4) = (12,\ -12)\ \ N$

Comprovem el teorema de l'impuls i la quantitat de moviment: "L'impuls que rep un cos li fa variar la quantitat de moviment"
Hem de comprovar que l'impuls rebut és igual a la variació de la quantitat de moviment.

L'impuls: $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = (12,\ -12)2 = (24,\ -24)\ \ Nm$

La variació de la quantitat de moviment:

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_o = 3(14,\ -16) - 3(6,\ -8) = (42,\ 48) - (18,\ 24) = (24\ ,-24)\ \ Kgm/s$$

Comprovem el teorema del treball i l'energia cinètica. És el teorema de les forces vives: "El treball que rep un cos lliure es converteix en energia cinètica o li fa variar l'energia cinètica"

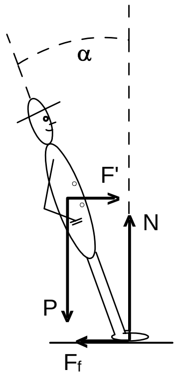
El treball: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (12,\ -12)(20,\ -24) = 12 \cdot 20 + (-12)(-24) = 240 + 288 = 528\ \ J$

La variació de l'energia cinètica: $\Delta U_c = U - U_o = 678 - 150 = 528\ \ J$

---

4. Un viatger va dret en un autobús que porta una velocitat de 57,6 km/h. Ara l'autobús frena uniformement i després de recórrer 20 m s'atura. Com que el passatger no s'agafa enlloc s'ha de tombar endarrere per no caure. Calcula l'angle que s`ha tombat i el coeficient de fregament estàtic mínim per tal que no rellisqui.

Primer calcularem l'acceleració de frenada. La velocitat inicial és: $v_o = \frac{57,6}{3,6} = 16\ \ m/s$



$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x} \rightarrow a = \frac{v^2 - v_o^2}{2\Delta x} = \frac{0 - 16^2}{2 \cdot 20} = -6,4\ \ m/s^2$$

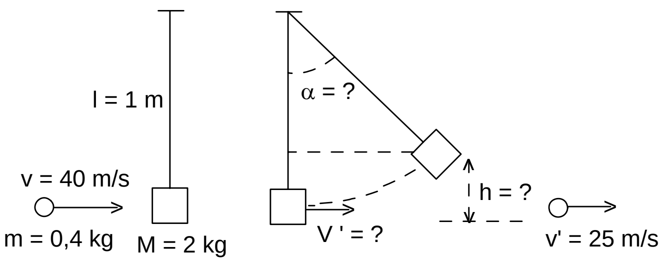
Per fer aquests problemes suposarem que el sistema de referència des del qual estudiem el moviment és el propi mòbil. Aquí és el mateix viatger o l'autobús. Ja veiem que és un sistema que té acceleració, per tant, és un sistema de referència no inercial. Això vol dir que no s'hi compleixen les lleis de Newton si no és que s'hi introdueixen les forces d'inèrcia (falses forces, no són reals). La força d'inèrcia F' és la que resulta de multiplicar la massa del cos per la seva acceleració en sentit contrari. Llavors, ja veiem que el mòbil, aquí el viatger, en relació a ell mateix està parat i continua parat, per tant, d'acord amb la primera llei de Newton, la suma de forces incloent-hi la d'inèrcia F', val zero. Mirant la figura, trobarem l'angle α.

$$\alpha = arctg\,\frac{F'}{P} = arctg\,\frac{m(-a)}{mg} = arctg\,\frac{-a}{g} = arctg\,\frac{6,4}{10} = 32,6^o$$

i que $F_f = F' \rightarrow \mu mg = ma \rightarrow \mu = \frac{a}{g} = \frac{6,4}{10} = 0,64$

---

5. Un pèndol penjat al sostre està format per un bloc de fusta de 2 kg i un fil d'1 m de llargada. Una bala de 400 g que va a 40 m/s en direcció horitzontal travessa el bloc i surt per l'altre costat a 25 m/s. Calcula l'angle final que fa el pèndol amb la vertical.



Calculem la velocitat de la massa M del pèndol després del xoc.
Es conserva la quantitat de moviment:

$$mv + MV = mv' + MV'$$

$$V' = \frac{mv + MV - mv'}{M} = \frac{0,4 \cdot 40 + 0 - 0,4 \cdot 25}{2} = 3\ \ m/s$$

Ara l'altura final que agafa el pèndol. Es conserva l'energia:

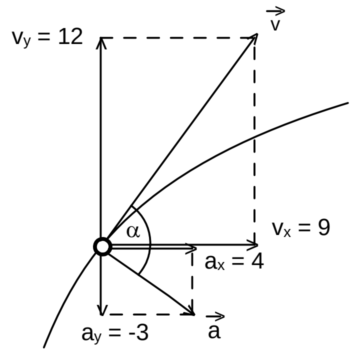
$$U_{p,\,final} = U_{c,inic} \rightarrow Mgh = \frac{1}{2}MV'^2 \rightarrow h = \frac{V'^2}{2g} = \frac{3^2}{2 \cdot 10} = 0,45\ \ m$$

Mirant el triangle, trobem: $\alpha = arctg\,\frac{l-h}{l} = arctg\,\frac{1-0,45}{1} = 56'63^o$

---

6. Una partícula, en un cert instant, té una velocitat $\vec{v} = (9,\ 12)$ m/s i una acceleració, $\vec{a} = (4,\ -3)$ m/s^2. Calcula l'angle α entre la velocitat i l'acceleració i el mòdul de l'acceleració tangencial i el de la normal.

Angle α entre els dos vectors $\vec{v}\ i\ \vec{a}$:



$$\alpha = \arccos\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v\cdot a} = \arccos\frac{(9,\ 12)(4,-3)}{\sqrt{9^2+12^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \arccos\frac{9\cdot4+12(-3)}{15\cdot5} = \arccos\ 0 = 90^o$$

Això vol dir que l'acceleració total és normal a la velocitat. Tota l'acceleració és normal. La tangencial és zero.

L'acceleració normal: $a_n = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5\ \ m/s^2$ i l'acceleració tangencial: $a_t = 0$

---

7. Un cos de massa m = 20 kg va per un pla horitzontal i en aquest instant té una velocitat v = 8 m/s. Hi ha un fregament de coeficient μ = 0,3. Ara li fem una força endavant F = 400 – 120 t^2 en la mateixa direcció i sentit que la velocitat. La força actua durant un temps t = 3 segons. Calcula:

a) La força resultant que rep el cos i l'impuls mecànic que li produeix.
b) La velocitat final del cos quan t = 3 s i el treball que ha rebut fet per la força resultant.

a) Calculem la força de fregament: $F_f = \mu mg = 0{,}3\cdot20\cdot10 = 60\ \ N$

i la força resultant: $F_r = F - F_f = (400-120t^2) - 60 = 540 - 120t^2$

Com que aquesta força F_r és variable, per calcular l'impuls, caldrà descompondre el temps t en intervals infinitament petits dt de manera que dins de cada un es pugui suposar que la força és constant. Calcularem l'impuls infinitesimal dI a cada un d'aquests intervals:

$$dI = F_r dt = (540 - 120t^2)dt$$

i sumant-los tots, tindrem l'impuls que ens demanen, és a dir, farem la integral: → $\boxed{I = \int_{t_2}^{t_2} Fdt}$

$$I = \int_{t=0}^{t=3}(540-120t^2)dt = \left[540t - 40t^3\right]_0^3 = 540\cdot3 - 40.3^3 = 1.620 - 1.080 = 540\ \ Ns$$

b) Per trobar la velocitat final hi aplicarem el teorema de transformació o teorema de l'impuls i la quantitat de moviment que diu que: " l'impuls que rep un cos li fa variar la quantitat de moviment": → $\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$

$$I = \Delta p = mv - mv_o \ \rightarrow\ v = \frac{I + mv_o}{m} = \frac{540+20\cdot8}{20} = \frac{700}{20} = 35\ \ m/s$$

El treball que ha rebut el cos és el que li ha fet la força resultant F_r. Amb el teorema de les forces vives podrem calcular aquest treball perquè: "El treball que rep un cos lliure li fa variar l'energia cinètica"

$\boxed{W = \Delta U_c}$ → $W = U_c - U_{c,o} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}20\cdot35^2 - \frac{1}{2}20\cdot8^2 = 12.250 - 640 = 11.610\ \ J$
