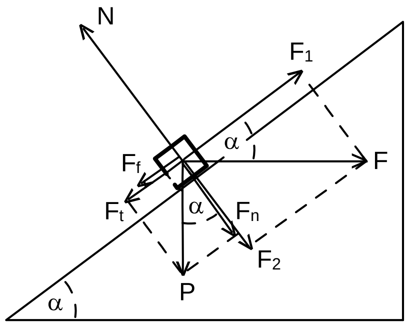
1. Un pla inclinat té una longitud d'1,2 m i puja a una altura de 72 cm. A baix de tot hi ha un cos de massa m = 2 kg, en repòs. Entre el cos i el pla, el coeficient de fregament és μ = 0,3. Ara amb una força horitzontal F = 30 N empenyem el cos amunt. Calcula l'acceleració, temps de pujada i la velocitat final.



Busquem primer: $\sin\alpha = \frac{72}{120} = 0{,}6$ i $\cos\alpha = \cos(\arcsin\ 0{,}6) = 0{,}8$

<u>Podem resoldre el problema per dinàmica:</u>

Cal dibuixar i calcular totes les forces que rep el cos i els components tangencial i normal d'aquestes forces:

$$F_1 = F\cos\alpha = 30\cdot0{,}8 = 24\ \ N \qquad F_2 = F\sin\alpha = 30\cdot0{,}6 = 18\ \ N$$

$$F_t = mg\sin\alpha = 2\cdot10\cdot0{,}6 = 12\ \ N \qquad F_n = mg\cos\alpha = 2\cdot10\cdot0{,}8 = 16\ \ N$$

$$F_f = \mu N = \mu(F_2 + F_n) = 0{,}3(18+16) = 10{,}2\ \ N$$

Ara, amb la segona llei, $\boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{a}}$ calcularem l'acceleració: $a = \dfrac{F_1 - F_t - F_f}{m} = \dfrac{24-12-10{,}2}{2} = 0{,}9\ \ m/s^2$

Com que sabem les constants del moviment: $x_o = 0$, $v_o = 0$, $a = 0{,}9$ m/s^2 i també la posició final $x = 1{,}2$ m,

amb la fórmula dels quadrats de la cinemàtica $\boxed{v = \sqrt{{v_o}^2 + 2a(x - x_o)}}$ calcularem la velocitat final:

$$v = \sqrt{{v_o}^2 + 2a(x-x_o)} = \sqrt{0 + 2\cdot0{,}9\cdot(1{,}2-0)} = \sqrt{2\cdot0{,}9\cdot1{,}2} = 1{,}47\ \ m/s$$

i el temps: $\boxed{v = v_o + at}$ → $t = \dfrac{v - v_o}{a} = \dfrac{1{,}47-0}{0{,}9} = 1{,}63\ \ s$

<u>Ara resoldrem el problema per energies:</u>

Primer hem de saber el treball que la força F fa sobre el cos:

$\boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = F\cdot\Delta x\cdot\cos\alpha}$ → $W = F\cdot\Delta x\cdot\cos\alpha = 30\cdot1{,}2\cdot0{,}8 = 28{,}8\ \ J$

el treball de fregament: $\boxed{W_f = F_f\Delta x}$ → $W_f = F_f\Delta x = 10{,}2\cdot1{,}2 = 12{,}24\ \ J$

i l'energia potencial final: $\boxed{U_p = mgh}$ → $U_p = mgh = 2\cdot10\cdot0{,}72 = 14{,}4\ \ J$

Una part del treball fet per la força F que el cos ha rebut s'ha perdut en forma de calor pel treball fregament W_f, una altra part s'ha convertit en energia potencial U_p i la resta és l'anergia cinètica final U_c. Escriurem:

$$U_c = W - W_f - U_p = 28{,}8 - 12{,}24 - 14{,}4 = 2{,}16\ \ J$$

Així podem calcular la velocitat final: $\boxed{U_c = \frac{1}{2}mv^2}$ → $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot2{,}16}{2}} = 1{,}47\ \ m/s$

Ara amb la fórmula dels quadrats, podrem calcular l'acceleració: $a = \dfrac{v^2 - {v_o}^2}{2\cdot\Delta x} = \dfrac{1{,}47^2 - 0}{2\cdot1{,}2} = 0{,}9\ \ m/s^2$

I el temps, com abans: $t = \dfrac{v - v_o}{a} = \dfrac{1{,}47-0}{0{,}9} = 1{,}63\ \ s$

2. Un cilindre buit de radi r = 25 cm, gira entorn del seu eix de simetria fent 900/π r.p.m. Un cos de massa m = 200 g es troba a la paret interior sense caure perquè hi ha un fregament estàtic que té un coeficient μ = 0,4. Ara el cilindre comença a frenar i es para en 20 segons. Calcula:

a) Les voltes que fa el cilindre fins que es para.
b) La força teòrica i la força real de fregament estàtic que hi ha al principi.
c) L'instant en què el cos de dins cau i les voltes que ha fet el cilindre en aquest instant..

a) Primer hem de calcular l'acceleració.

La freqüència inicial, abans de començar a frenar, és: $\boxed{f = \frac{n}{t}}$ → $f_o = \frac{n_o}{t} = \frac{900/\pi}{60} = \frac{15}{\pi}\ \ rev/s$

i la velocitat angular inicial: $\boxed{\omega = 2\pi f}$ → $\omega_o = 2\pi f_o = 2\pi\frac{15}{\pi} = 30\ \ rad/s$

L'acceleració serà: $\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t}$ → $\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{0-30}{20} = -1{,}5\ \ rad/s$

Per calcular el nombre de voltes fins que es para ho podem fer de dues maneres:

1. Calculant primer l'angle recorregut en aquests 20 segons:

$$\boxed{\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \rightarrow \varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 30{\cdot}20 - \frac{1}{2}(-1{,}5){\cdot}20^2 = 600 - 300 = 300\ \ rad$$

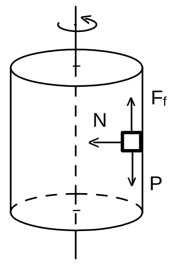
I passant-ho a voltes: $\boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi}}$ → $n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{300}{2\pi} = \frac{150}{\pi} = 47{,}75\ \ rev$

2. Amb la freqüència mitjana: $\boxed{f_m = \frac{n}{t} = \frac{f_o + f}{2}}$

$$f_m = \frac{f_o + f}{2} = \frac{15/\pi + 0}{2} = \frac{15}{2\pi}\ \ rev/s \rightarrow n = f_m t = \frac{15}{2\pi}20 = \frac{150}{\pi} = 47{,}75\ \ rev$$

b) Com que és un problema de dinàmica, primer dibuixarem les forces que rep el cos. (mai les que fa). Aquí son tres: El fregament F_f, el pes P i la normal N que li fa la superfície del cilindre.

La força de fregament sempre es: $\boxed{F_f = \mu N}$



Aquí la força N és justament la força normal que fa que el cos tingui un moviment circular MC, és a dir, és la força centrípeta:

$\boxed{F_c = m\omega^2 r}$ $N = F_c = m\omega^2 r = 0{,}2{\cdot}30^2{\cdot}0{,}25 = 45\ \ N$

I la força de fregament estàtic teòric: $F_f = \mu N = 0{,}4{\cdot}18 = 18\ \ N$

Si el cos s'aguanta sense caure és perquè la força de fregament és igual que el pes i de sentit contrari. El fregament estàtic real que hi actua és:

$$F_f = P = mg = 0{,}2{\cdot}10 = 2\ \ N$$

Veiem que el cos s'aguanta sense caure perquè el pes és P = 2 N i el fregament que l'aguanta pot arribar a F_f = 18 N.

c) Si el cilindre disminueix la seva velocitat de rotació, també disminueix la força normal N que la paret del cilindre fa sobre el cos i, per tant, també la força de fregament estàtic que sosté el cos sense caure. Quan la força de fregament sigui igual que el pes del cos, llavors de seguida caurà. Escriurem que el cos cau quan la força de fregament iguala el pes.

$$F_f = P \rightarrow \mu N = mg \rightarrow \mu F_c = mg \rightarrow \mu m\omega^2 r = mg \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}4{\cdot}0{,}25}} = 10\ \ rad/s$$

El cos cau quan ω = 10 s^{-1} i això serà a l'instant: $t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{10-30}{-1{,}5} = 13{,}33\ \ s$

Calculem l'angle φ recorregut en aquest instant: $\varphi = \varphi_0 + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 30 \cdot 13{,}33 + \frac{1}{2}(-1{,}5)\cdot 13{,}33^2 = 266{,}6 \ \ rad$

I les voltes: $n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{266{,}6}{2\pi} = 42{,}43 \ \ rev$

Ara buscarem les voltes amb la freqüència mitjana: Calculem la freqüència a l'instant en què cau: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \ \ rev/s$

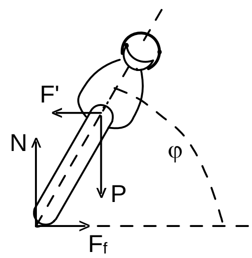
Ara la freqüència mitjana: $f_m = \frac{f_o + f}{2} = \frac{15/\pi + 5/\pi}{2} = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \ \ rev/s$

i el nombre de voltes: $n = f_m t = \frac{10}{\pi} 13{,}3 = 42{,}43 \ \ rev$

---

3. Un motorista fa un giravolt sense peraltar a 72 km/h. Calcula l'angle que s'inclina al girar i el valor mínim que ha de tenir el coeficient de fregament perquè no rellisqui.

La velocitat és: $v = \frac{72}{3{,}6} = 20 \ \ m/s$ i l'acceleració normal: $\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$ → $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{50} = 8 \ \ m/s^2$



Suposarem que el sistema de referència des del qual estudiem el moviment és el propi mòbil. És un sistema que té acceleració, per tant, és un sistema de referència no inercial. Això vol dir que perquè s'hi compleixen les lleis de Newton cal que hi introduïm les forces d'inèrcia. La força d'inèrcia F' és la que resulta de multiplicar la massa del cos per la seva acceleració en sentit contrari.

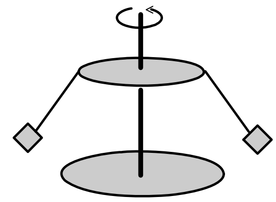
Un mòbil, en relació a ell mateix sempre està parat i continua parat, per tant, d'acord amb la primera llei de Newton, la suma de forces incloent-hi la d'inèrcia F', val zero. Dibuixant totes aquestes forces: el pes P, el fregament F_f, la normal N del terra i la d'inèrcia F', de seguida veiem que l'angle φ és:

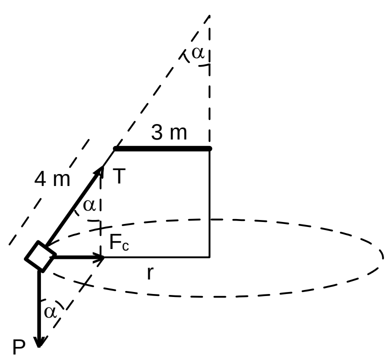
$$\varphi = 90^o - arctg\frac{F'}{P} = 90^o - arctg\frac{ma}{mg} = 90^o - arctg\frac{a}{g} = 90^o - arctg\frac{8}{10} = 90^o - 38{,}7^o = 51{,}3^o$$

i el coeficient de fregament mínim: $F_f = F'$ → $\mu mg = ma$ → $\mu = \frac{a}{g} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

---

4. Una atracció de fires consisteix en una anella horitzontal de 3 m de radi en què hi ha penjades unes cadiretes de 2 kg amb unes cordes de 4 m i massa negligible.
L'anella gira amb un moviment circular uniforme.
a) Calculeu la velocitat angular quan la corda d'una cadireta buida fa un angle de 30° amb la vertical.
b)Tensió de la corda en el cas anterior i freqüència de rotació en rpm.
c) Si la tensió màxima que poden suportar les cordes sense trencar-se és de 785 N i l'atracció gira amb un angle de 30°, quin és el pes màxim que pot haver-hi a la cadireta? A quina massa correspon aquest pes? *(Selectivitat)*





a) És com si fos un pèndol cònic. La cadireta fa un MCU (moviment circular uniforme). Les forces reals que hi actuen són el pes P i la tensió del fil T. Aquestes dues forces sumades vectorialment donen una resultant que és la força centrípeta F_c, normal a la trajectòria i perpendicular a la velocitat, la qual produeix el MCU.
Com que sabem l'angle α i el pes P, podem calcular la força centrípeta F_c.

$$tg\alpha = \frac{F_c}{P} \rightarrow F_c = mgtg\alpha = 2\cdot 10\cdot tg30^o = 11{,}547 \ \ N$$

Per calcular la velocitat angular necessitem el radi del MCU. Mirant la figura, tenim:

$$r = 3 + 4\sin\alpha = 3 + 4\sin 30^o = 5 \ \ m$$

Amb la força centrípeta i el radi ja podem calcular la velocitat angular ω:

$$\boxed{F_c = m\omega^2 r} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_c}{mr}} = \sqrt{\frac{11{,}547}{2\cdot 5}} = 1{,}0746 \ \ rad/s$$

b) Calculem la tensió de la corda. De seguida veiem: $\cos\alpha = \dfrac{P}{T}$ → $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = \dfrac{2{\cdot}10}{\cos 30^o} = 23{,}094 \;\; N$

i la freqüència en rpm: $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi}}$ → $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1{,}0746}{2\pi} 60 = 10{,}26 \;\; rpm$

c) Si abans, amb el pes, hem calculat la tensió, ara amb la tensió T' calcularem el pes P'. Com abans:

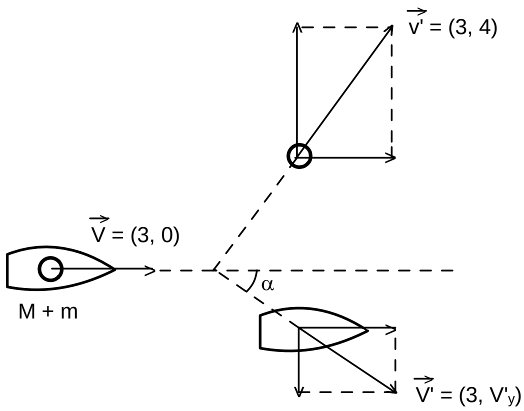
$$\cos\alpha = \frac{P}{T} \quad \rightarrow \quad P = T\cos\alpha = 785\cos 30^o = 680 \;\; N$$

Per tant, el pes màxim que hi pot haver en una cadireta és aproximadament el de 66 kg.

---

5. Un noi de massa m = 60 kg va en una barca de massa M = 120 kg a la velocitat V = 3 m/s. Ara el noi salta a fora, de costat, amb una velocitat v' = 4 m/s en direcció perpendicular a la trajectòria de la barca. Calcula:

a) Velocitat de la barca després de saltar el noi. b) Variació d'energia.
c) Angle que es desvia la barca de la seva trajectòria inicial.



a) Com que és un salt, no hi ha forces exteriors, només hi ha les que es fan mútuament la barca i el noi, per tant, es conserva la quantitat de moviment del conjunt tal com diu el teorema de conservació de la quantitat de moviment. A més, com que el moviment és en dues dimensions, caldrà fer servir vectors.
Tinguem present que, quan el noi salta, continua tenint la velocitat v'_x = 3 m/s que tenia a dins de la barca en la direcció x i ara s'hi afegeix el component en la direcció y perpendicular a l'anterior v'_y = 4 m/s. Per tant, després de saltar, el noi té una velocitat: $\vec{v}' = (3,\;\; 4) \;\; m/s$.

Si haguéssim fet el dibuix al revés, tindríem: $\vec{v}' = (3, -4) \;\; m/s$.

La barca també manté la velocitat en la direcció x,: V'_x = 3 m/s. Ara escriurem:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}\,'} \quad \rightarrow \quad (M+m)\vec{V} = M\vec{V}' + m\vec{v}'$$

i la velocitat final de la barca serà:

$$\vec{V}' = \frac{(M+m)\vec{V} - m\vec{v}}{M} = \frac{(120+60)(3,\;\; 0) - 60(3,\;\; 4)}{120} = (3,\;\; -2) \;\; m/s$$

b) Per calcular energies necessitem els mòduls de totes les velocitats:

$V = 3 \;\; m/s$, $\quad V' = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \;\; m/s$, $\quad v' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \;\; m/s$.

$$\Delta U = U' - U = (\frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2) - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (\frac{1}{2}120.13 + \frac{1}{2}60{\cdot}5^2) - \frac{1}{2}(120+60)3^2 = 1.530 - 810 = 720 \;\; J$$

Hi ha hagut un augment d'energia que prové del treball que fa el noi en saltar.

c) L'angle α que es desvia la barca és el mateix que l'angle que fa la velocitat final. $\alpha = arctg \dfrac{V'_x}{V'_y} = arctg \dfrac{-2}{3} = -33{,}7^o$
