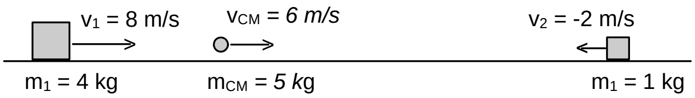
1. Un cos de massa m_1 = 4 kg va a la velocitat v_1 = 8 m/s per un pla horitzontal sense fregament i xoca elàsticament i frontal amb un altre de massa m_2 = 1 kg que va en sentit contrari a la velocitat v_2 = -2 m/s. Calcula:

a) Velocitats dels cossos després del xoc.
b) Velocitat del centre de masses v_{CM} del sistema.
c) Energia total del sistema i energia del centre de masses U_{CM}.

Si entremig dels cossos hi ha una molla de constant d'elasticitat k = 2.000 N/m,

d) Calcula el tros que es comprimiria amb el xoc.



a) Xoc frontal elàstic:

$$\boxed{\begin{array}{c} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \end{array}} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4{\cdot}8 + 1(-2) = 4v_1' + 1v_2' \\ 4 + v_1' = -2 + v_2' \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4v_1' + v_2' = 30 \\ v_2' = v_1' + 10 \end{array} \right. \rightarrow$$

$\rightarrow$ $4v_1' + v_1' + 10 = 30$ $\rightarrow$ $5v_1' = 20$ $\rightarrow$ Velocitats després del xoc: $\left| \begin{array}{l} v_1' = 4 \ \ m/s \\ v_2' = 14 \ \ m/s \end{array} \right.$

b) El centre de masses d'un sistema és un punt imaginari que té les propietats següents:

Massa: $m_{CM} = m_1 + m_2$ Posició: $x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ Velocitat: $v_{CM} = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$

Energia cinètica: $U_{CM} = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = \dfrac{1}{2}m_{CM}v_{CM}^2$ Quantitat de moviment: $p_{CM} = (m_1 + m_2)v_{CM} = m_{CM}v_{CM}$

La seva velocitat i, per tant, la seva energia cinètica i la seva quantitat de moviment només les poden fer variar les forces externes. En els xocs, tant en els elàstics com en els inelàstics, aquestes magnituds, el CM les manté constants.

La velocitat serà: $v_{CM} = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{4.8 + 1(-2)}{4 + 1} = \dfrac{30}{5} = 6 \ \ m/s$, $v_{CM}' = \dfrac{m_1v_1' + m_2v_2'}{m_1 + m_2} = \dfrac{4.4 + 1{\cdot}14}{4 + 1} = \dfrac{30}{5} = 6 \ \ m/s$

Tal com hem dit, la velocitat del CM no varia amb el xoc.

c) L'energia total del sistema es manté constant perquè el xoc és elàstic:

abans del xoc: $U_c = U_{c,1} + U_{c,2} = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \dfrac{1}{2}4{\cdot}8^2 + \dfrac{1}{2}1{\cdot}2^2 = 128 + 2 = 130 \ \ J$

després del xoc: $U_c' = U_{c,1}' + U_{c,2}' = \dfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = \dfrac{1}{2}4{\cdot}4^2 + \dfrac{1}{2}1{\cdot}14^2 = 32 + 98 = 130 \ \ J$

L'energia del centre de masses abans i després del xoc és: $U_{CM} = \dfrac{1}{2}m_{CM}v_{CM}^2 = \dfrac{1}{2}5{\cdot}6^2 = 90 \ \ J$

d) L'energia cinètica que passa a la molla en forma d'energia potencial elàstica és la diferència entre la total i la del CM:

$$\Delta U = U_c - U_{CM} = 130 - 90 = 40 \ \ J$$

Si fos un xoc inelàstic, la velocitat del conjunt després del xoc seria la del CM i l'energia que aquí passa a la molla seria l'energia perduda en el xoc.

L'energia elàstica quan la molla es comprimeix un tros d és: $\boxed{U_{el} = \dfrac{1}{2}kd^2}$

i el tros que s'ha comprimit la molla del problema és: $d = \sqrt{\dfrac{2U_{el}}{k}} = \sqrt{\dfrac{2{\cdot}40}{2.000}} = 0{,}2 \ \ m = 20 \ \ cm$

La velocitat del centre de masses també ens permet de calcular les velocitats després del xoc. Cal buscar la velocitat de cada cos abans del xoc relativa al centre de masses:

$$v_{1,rel} = v_1 - v_{CM} = 8 - 6 = 2 \;\; m/s \qquad v_{2,rel} = v_2 - v_{CM} = -2 - 6 = -8 \;\; m/s$$

Després del xoc, les velocitats relatives al CM són les mateixes d'abans del xoc però canviades de signe:

$$v'_{1,rel} = -v_{1,rel} = -2 \;\; m/s \qquad v'_{2,rel} = -v_{2,rel} = -(-8) = 8 \;\; m/s$$

Ara tornarem a sumar la v_{CM} a cada una i tindrem les velocitats després del xoc:

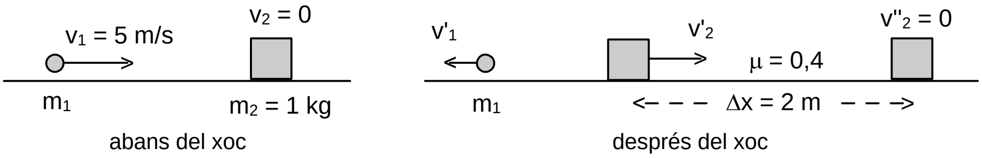
$$v'_1 = v'_{1,rel} + v_{CM} = -2 + 6 = 4 \;\; m/s \qquad v'_1 = v'_{1,rel} + v_{CM} = 8 + 6 = 14 \;\; m/s$$

---

2. Una bola d'acer xoca elàsticament contra un bloc d'1 kg inicialment en repòs sobre una superfície horitzontal. En el moment del xoc la bola té una velocitat de 5 m/s. El coeficient de fricció dinàmic entre la superfície i el bloc és de μ = 0,4. Com a conseqüència del xoc, el bloc recorre 2 m abans d'aturar-se. Calculeu:

a) La velocitat del bloc just després del xoc.
b) La massa de la bola d'acer.
c) L'energia cinètica perduda per la bola en el xoc elàstic. *(Selectivitat 2006. Aquí hem canviat μ = 0,2 per μ = 0,4)*

Primer cal fer ben fet el dibuix i assignar lletres a cada magnitud posant-hi els valors que ens dóna el problema.



a) Sabent que després del xoc el cos m_2 recorre 2 m, ja podem calcular la seva velocitat v'_2 després del xoc.
Necessitem la força de fregament: $F_f = \mu m_2 g$.
I ara podem fer el càlcul <u>per dinàmica</u>:

buscant primer l'acceleració amb la 2a llei: $a = \dfrac{-F_f}{m} = \dfrac{-\mu mg}{m} = -\mu g = -0{,}4{\cdot}10 = -4 \;\; m/s$

i la velocitat v'_2 amb la fórmula dels quadrats: $v''^2_2 = v'^2_2 + 2a\Delta x \;\rightarrow\; v'_2 = \sqrt{v''^2_2 - 2a\Delta x} = \sqrt{0 - 2(-4)2} = 4 \;\; m/s$

o fer-lo <u>per energies</u>:
L'energia cinètica que té el bloc m_2 després del xoc es converteix en treball de fregament:

$$U_c = W_f \;\rightarrow\; \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = F_f \Delta x \;\rightarrow\; \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \mu m_2 g \Delta x \;\rightarrow\; v'_2 = \sqrt{2\mu g \Delta x} = \sqrt{2{\cdot}0{,}4{\cdot}10{\cdot}2} = \sqrt{16} = 4 \;\; m/s$$

b) Per saber la massa m_2 cal fer servir les fórmules del xoc frontal elàstic:

$$\boxed{\begin{array}{c} v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow\; 5 + v'_1 = 0 + 4 \;\rightarrow\; v'_1 = -1 \;\; m/s \\ \rightarrow\; m_1{\cdot}5 + 0 = m_1(-1) + 1{\cdot}4 \;\rightarrow\; 6m_1 = 4 \;\rightarrow\; m_1 = \dfrac{2}{3} \;\; kg \end{array}$$

c) L'energia cinètica perduda serà: $\Delta U_c = \dfrac{1}{2} m_1 v'^2_1 - \dfrac{1}{2} m_1 v^2_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}1^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}5^2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{25}{3} = -8 \;\; J$
