1. La velocitat màxima d'un MHS és 24 cm/s i l'amplitud de 4 cm. Escriu l'equació de l'elongació si el moviment comença quan x = - 2 cm i amb velocitat positiva..

L'equació de la posició és: $\boxed{x = A\sin(\omega t + \varphi)}$ derivant, tindrem la velocitat: $\boxed{v = \omega A\cos(\omega t + \varphi)}$

I ja veiem que la velocitat màxima serà quan $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ i per tant, la velocitat màxima serà: $\boxed{v_{max} = \omega A}$

Ja podem calcular la pulsació o freqüència angular: $\omega = \dfrac{v_{max}}{A} = \dfrac{24}{4} = 6\ s^{-1}$.

Per trobar la fase inicial φ ens fixarem que el problema diu que, quan t = 0, x = -2 cm i que l'amplitud és A = 4 cm.

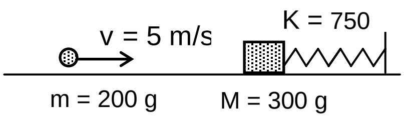
Substituïm això a l'equació: $-2 = 4\sin\varphi$ → $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$ → $\left|\begin{array}{l}\varphi = 210^o = \dfrac{7\pi}{6}\\ \varphi = 330^o = \dfrac{11\pi}{6}\end{array}\right.$ Hem trobat dues solucions.

En aquest instant inicial (t = 0), la velocitat és: $v = \omega A\cos\varphi$ i com que el problema diu que és positiva, llavors $\cos\varphi > 0$, per tant, de les dues solucions triarem: $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}$ que és l'angle que té el cosinus positiu. L'equació és: $x = 4\sin(6t + \dfrac{11\pi}{6})\ \ en\ cm\ i\ s$

---

2. Mira la figura. És un xoc elàstic. Després del xoc el cos M, que inicialment estava en repòs, fa un MHS perquè està unit a una molla. No hi ha fregament amb el terra. Calcula:

a) La velocitat del cos M després del xoc.
b) El període de vibració del cos M i l'energia total en aquest MHS.
c) L'equació del MHS.



a) Per resoldre el xoc elàstic tenim dues equacions: $\boxed{\begin{array}{c} mv + MV = mv' + MV' \\ v + v' = V + V' \end{array}}$

Aplicades al nostre cas: $\left|\begin{array}{c} 0{,}2\cdot 5 + 0 = 0{,}2v' + 0{,}3V' \\ 5 + v' = 0 + V' \end{array}\right.$ → $\begin{array}{c} 2v' + 3V' = 10 \\ v' = V' - 5 \end{array}$ → $2(V' - 5) + 3V' = 10$ → $V' = 4\ \ m/s$

b) Ara tenim un cos de massa m = 0,3 kg que fa un MHS perquè està unit a una molla. La fórmula del període és: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}}$

Aquí serà: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}3}{750}} = 0'1257\ \ s^{-1}$

Fixem-nos que la velocitat trobada és la màxima del MHS que farà el cos i que el moviment comença, d'acord amb el dibuix, quan x = 0. També hi veiem que la velocitat inicial és positiva. Llavors la fase inicial és: φ = 0.

L'energia cinètica quan x = 0 és igual a la total perquè la molla en aquest instant no està ni allargada ni comprimida i l'energia potencial és zero:

$$U = U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0{,}3\cdot 4^2 = 2{,}4\ \ J$$

c) La fórmula de la constant d'elasticitat és: $\boxed{K = m\omega^2}$ Ja podem calcular ω: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{750}{0{,}3}} = 50\ \ s^{-1}$

o també la podíem calcular amb el període: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0{,}1257} = 50\ \ s^{-1}$

La velocitat màxima és: $\boxed{v_{max} = \omega A}$ i l'amplitud: $A = \dfrac{v_{max}}{\omega} = \dfrac{4}{50} = 0{,}08\ \ m = 8\ \ cm$

Ja podem escriure l'equació de l'elongació: $\boxed{x = A\sin(\omega t + \varphi)}$ → $x = 8\sin 50t\ \ en\ cm\ i\ s$

---

3. Una ona té una equació: $y = 4\sin\pi(\frac{x}{2} + 3t)$ en cm i s. Calcula:

a) Període, freqüència, longitud d'ona i velocitat de propagació.
b) Considera un punt del medi a 10 cm del focus i compara el seu estat de vibració amb el focus.
c) Calcula la velocitat de vibració del punt anterior a l'instant t = 1,2 s.

a) L'equació general d'una ona harmònica és: $\boxed{y = A\sin(\omega t \pm kx)}$

L'equació que ens han donat l'escriurem així: $y = 4\sin(3\pi t + \frac{\pi}{2}x)$ per poder-la comparar amb la de sobre.

Llavors tenim: $\omega = 3\pi \ s^{-1}$ i $k = \frac{\pi}{2} \ m^{-1}$ i com que $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ i $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Ja podem calcular el període i la freqüència: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} = 0{,}667 \ s$ i $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \ Hz$

i la longitud d'ona: $\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \ cm$ i la velocitat de propagació: $\boxed{c = \lambda f}$ → $c = \lambda f = 4 \cdot 1{,}5 = 6 \ m/s$

b) Hem de veure la distància x = 10 cm quantes semilongituds d'ona conté. És a dir, a la fórmula: $\boxed{x = \alpha \frac{\lambda}{2}}$

si α = parell o zero, el punt vibra en fase amb el focus, si α = imparell, vibra en oposició de fase. Aquí tenim:

$\alpha = \frac{x}{\lambda/2} = \frac{10}{4/2} = 5$ → *imparell* → el punt vibra en oposició de fase amb el focus.

c) Per trobar la velocitat de vibració del punt, cal derivar l'equació d'ona:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}4\sin(3\pi t + \frac{\pi}{2}x) = 12\pi\cos(3\pi t + \frac{\pi}{2}10) =$$

$$= 12\pi\cos(3\pi 1{,}2 + \frac{\pi}{2}10) = 12\pi\cos(3{,}6\pi + 5\pi) = 12\pi\cos(0{,}6\pi + 8\pi) = 12\pi\cos 0{,}6\pi = -11'65 \ cm/s$$

---

4. El focus d'una ona sonora vibra amb un MHS d'equació: $y = A\sin 800\pi t$ en cm i s. La velocitat de propagació és c = 340 m/s. Escriu l'equació d'ona.

Comparant l'equació que ens han donat amb l'equació general del MHS: $\boxed{y = A\sin(\omega t + \varphi)}$

veiem que $\omega = 800\pi \ cm/s$ i $\varphi = 0$

Calculem la freqüència: $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$ → $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{800\pi}{2\pi} = 400 \ Hz$

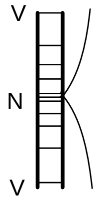
i, amb la fórmula $\boxed{c = \lambda f}$ calcularem la longitud d'ona: → $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{400} = 0{,}85 \ m$

Ara ja podem trobar la constant k o nombre d'ona: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ → $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{85} \ cm^{-1}$

i escriure l'equació d'ona que ens demanen: $y = A\sin(800\pi t - \frac{2\pi}{85}x) \ en \ cm \ i \ seg$

---

5. Un tub obert sona amb la seva freqüència fonamental f = 440 Hz. Calcula la longitud del tub si la velocitat de propagació del so és de 336 m/s.



Amb la fórmula $\boxed{c = \lambda f}$ calculem la longitud d'ona: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{336}{440} = 0{,}76\ \ m = 76\ \ cm$

Sabem que la freqüència fonamental en els tubs oberts suposa un node al mig i un ventre a cada extrem.

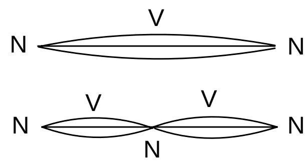
Com que la distància entre node N i ventre V, sempre és: $\boxed{NV = \frac{\lambda}{4}}$ podem escriure que la longitud del tub és:

$$l = 2\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} = \frac{76}{2} = 38\ \ cm$$

---

6. Fem vibrar una corda fixa per tots dos caps. Té una tensió F = 800 N, una longitud l = 80 cm i una massa de 16 g. Calcula la freqüència fonamental i la del primer harmònic.

Podem calcular la velocitat de propagació de les ones per la corda: $\boxed{c = \sqrt{\frac{F}{m/l}}}$



$$c = \sqrt{\frac{800}{0{,}016/0{,}8}} = 200\,m/s$$

La freqüència fonamental té només un fus. De node a node hi ha sempre una distància $\boxed{NN = \frac{\lambda}{2}}$ per tant, podem escriure:

$\lambda = 2NN = 2l = 2{\cdot}0{,}8 = 1{,}6\ \ m$ i la freqüència: $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{200}{1{,}6} = 125\ \ Hz$

En el primer harmònic hi ha dos fusos i ja es veu que la longitud del fil és una longitud d'ona λ: $l = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda$

$\lambda = 2NN = l = 80\ \ cm$ i la freqüència: $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{200}{0{,}8} = 250\ \ Hz$

---

7. Tenim un cos de massa m = 20 g penjat en una molla. Ara l'estirem un tros avall i es posa a oscil·lar amb una energia U = 0,0064 J i un període T = π/10 segons. Calcula:
a) La constant de la molla i l'amplitud de vibració.
b) Escriu l'equació de l'elongació i calcula la velocitat quan el cos passa per la posició d'equilibri.

a) Amb el període T podem calcular la pulsació o freqüència angular ω. $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ → $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/10} = 20\ \ s^{-1}$

La constant de recuperació de la molla és: $\boxed{k = m\omega^2}$ → $k = m\omega^2 = 0{,}02{\cdot}20^2 = 8\ \ N/m$

L'energia d'un cos que fa un MHS és: $\boxed{U = \frac{1}{2}kA^2}$ → $A = \sqrt{\frac{2U}{k}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}0{,}0064}{8}} = 0{,}04\ \ m = 4\ \ cm$

b) L'equació de l'elongació és: $\boxed{y = A\sin(\omega t + \varphi)}$ → $y = A\sin(\omega t + \varphi) = 4\sin(20 + \frac{3\pi}{2})$ *en cm i seg*

L'angle de fase inicial el calculem tenint present que quan t = 0 → x = -A.

Tindrem: $-A = A\sin(\omega{\cdot}0 + \varphi)$ → $\sin\varphi = -1$ → $\varphi = 270^o = \frac{3\pi}{2}$

La velocitat en funció de la posició és: $\boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$ i com que x = 0 → $v = \omega A = 20{\cdot}0{,}04 = 0{,}8\ \ m/s$