1. Una massa puntual fa un MHS amb una velocitat màxima de 20 cm/s i una amplitud de 4 cm. El moviment ha començat quan la velocitat era màxima negativa. Escriviu les equacions de l'elongació i de la velocitat i calculeu l'elongació i la velocitat quan t = 0,2 segons.

Les equacions del MHS són:

Són tres magnituds: posició x, velocitat v i acceleració a que estan en funció de la variable temps t.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ v &= \omega A\cos(\omega t + \varphi) \\ a &= -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

Necessitem saber les tres constants: A = amplitud, ω = pulsació o freqüència angular i φ = fase inicial. Mirant l'equació de la velocitat, veiem que el valor màxim de la velocitat serà quan $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, és a dir, la velocitat màxima és: $\boxed{v_{max} = \omega A}$

Ja podem calcular la pulsació: $\omega = \dfrac{v_{max}}{A} = \dfrac{20}{4} = 5\ s^{-1}$.

Per calcular la fase inicial φ, escriurem l'equació de la velocitat sabent, tal com diu el problema, que quan: t = 0 la velocitat és:

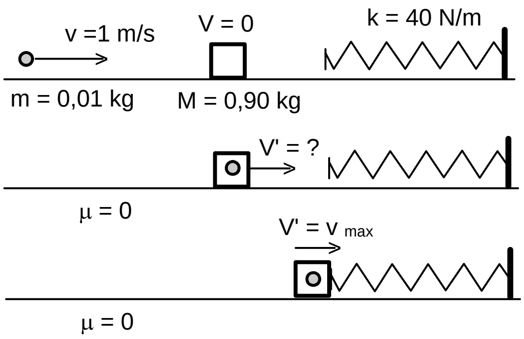
$$v = -v_{max} = -\omega A \ \rightarrow\ -\omega A = \omega A\cos(0+\varphi) \ \rightarrow\ \cos\varphi = -1 \ \rightarrow\ \varphi = \pi$$

Ja podem escriure les equacions: $\left| \begin{aligned} x &= 4\sin(5t+\pi) \\ v &= 20\cos(5t+\pi) \end{aligned} \right.$ (en cm i segons)

Ara calcularem l'elongació o posició x i la velocitat v quan t = 2 s: $\left| \begin{aligned} x &= 4\sin(5\cdot 0{,}2+\pi) = 4\sin 4{,}14 = -3{,}36\ cm \\ v &= 20\cos(5\cdot 0{,}2+\pi) = 20\cos 4{,}14 = -10{,}81\ cm/s \end{aligned} \right.$

---

2. Un bloc de massa M = 90 g està en repòs en un pla horitzontal sense fregament. Una bala de massa m =10 g que va amb una velocitat horitzontal v = 1 m/s hi xoca i hi queda unida. El conjunt xoca ara amb una molla de constant d'elasticitat K = 40 N/m i s'hi enganxa. Llavors comença un MHS. Escriu l'equació de l'elongació del MHS que fa el conjunt.



Calculem la velocitat del conjunt després del xoc:

És un xoc inelàstic → es conserva la quantitat de moviment:

$$\boxed{mv + MV = (m+M)V'}$$

$$V' = \frac{mv+MV}{m+M} = \frac{0{,}01\cdot 1+0}{0{,}1+0{,}9} = 10\ cm/s = 0{,}1\ m/s$$

Busquem les tres constants de l'equació del MHS: ω, A, i φ :

De la massa que vibra ara en direm m i val: m = 0,01 + 0,90 = 0,1 kg

La constant k d'una molla que produeix un MHS és: $\boxed{k = m\omega^2}$ Ja podem calcular ω: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{40}{0{,}1}} = 20\ s^{-1}$

Per calcular la amplitud A, tindrem present que la velocitat del conjunt després del xoc és la velocitat que té al moment de començar el MHS, és a dir, és la velocitat màxima.

Tindrem: $\boxed{v_{max} = \omega A}$ → $A = \dfrac{v_{max}}{\omega} = \dfrac{10}{20} = 0{,}5\ cm$

O també, com que sabem que l'energia total del MHS és: $\boxed{U = \dfrac{1}{2}kA^2}$

i en el nostre cas l'energia total del MHS és la cinètica que té el conjunt després del xoc abans de tocar la molla: $U_c = \dfrac{1}{2}mv^2$.

Igualant aquestes dues energies, tenim $kA^2 = mv^2$, però $k = m\omega^2$ → $m\omega^2 A^2 = mv^2$ → $A = \dfrac{v}{\omega}$ com abans.

Ja veiem en el dibuix que el MHS comença a l'origen amb velocitat positiva, o sigui, sin $\varphi = 0$ i cos $\varphi = 1$ → $\varphi = 0$. Ja tenim la fase inicial.

L'equació serà: $\boxed{x = A\sin(\omega tt + \varphi)}$ → $x = 0{,}5\sin 20t \quad en\ cm\ i\ seg$

---

3. L'equació d'una ona és: $y = 5\sin\pi(4t - \frac{x}{8})$ en cm i segons. Calcula:

a) La freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de propagació de l'ona.
b) La velocitat de vibració d'un punt que es troba a 4 cm de focus a l'instant t =1/16 segons.

a) L'equació d'ona és de la forma següent: $\boxed{y = A\sin(\omega t \pm kx)}$

Calculem les constants:l'amplitud A en m o en cm,

la pulsació ω: $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ en seg^{-1} i el nombre d'ona k: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ en m^{-1} o en cm^{-1}.

Escriurem l'equació que ens han donat així: $y = 5\sin(4\pi t - \frac{\pi}{8}x)$ per tal de poder identificar les constants de l'equació.

Veiem que l'amplitud és: A = 5 cm, la pulsació: $\omega = 4\pi\ s^{-1}$ i el nombre d'ona: $k = \pi/8\ cm^{-1}$.

Podem calcular el període: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\ s$ i la freqüència: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1/2} = 2\ Hz$

I amb el nombre d'ona, la longitud d'ona: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/8} = 16\ cm$

La velocitat de propagació l'obtindrem amb la relació: $\boxed{c = \lambda f}$ → $c = \lambda f = 16{\cdot}2 = 32\ cm/s$.

b) Un punt que es troba a x = 4 cm del focus vibrarà segons l'equació: $y = 5\sin(4\pi t - \frac{\pi}{8}4) = 5\sin(4\pi t - \frac{\pi}{2})$

i derivant aquesta equació de l'elongació respecte al temps, trobarem la velocitat de vibració d'aquest punt a qualsevol instant:

$$v = 20\pi\cos(4\pi t - \frac{\pi}{2})$$

Quan t = 1/6 seg és: $v = 20\pi\cos(4\pi\frac{1}{6} - \frac{\pi}{2}) = 20\pi\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = 20\pi\cos(\frac{4\pi - 3\pi}{6}) = 20\pi\cos\frac{\pi}{6} = 54{,}41\ cm/s$

---

4. Una ona té una freqüència f = 4 Hz i es propaga a una velocitat c = 32 cm/s. L'amplitud de vibració és de 3 cm.

a) Escriu l'equació d'ona. Calcula:
b) La velocitat de vibració d'un punt que es troba a la distància x = 4 cm del focus a l'instant t = 4,5 s.
c) La diferència de fase del punt anterior amb el focus i amb un punt que es troba a x = 2 cm del focus.
d) La diferència de fase d'un punt qualsevol del medi entre t = 2,4 s i t = 2,6 s.

a) La forma que té l'equació és: $\boxed{y = A\sin(\omega t - kx)}$ per escriure-la ens cal saber primer les tres constants:

Calculem les constants de l'equació:

L'amplitud: A = 3 cm, ens la donen.

La pulsació ω la calcularem a partir de la freqüència: $\boxed{\omega = 2\pi f}$ → $\omega = 2\pi f = 2\pi 4 = 8\pi\ s^{-1}$

Per tenir el nombre d'ona k, primer calcularem la longitud d'ona λ amb la relació: $\boxed{c = \lambda f}$ → $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{32}{4} = 8\ cm$

I ara el nombre d'ona: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ → $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad cm^{-1}$

Ja podem escriure l'equació: $\boxed{y = A\sin(\omega t - kx)}$ → $y = 3\sin(8\pi t - \frac{\pi}{4}x)$ en cm i segons.

Aquesta equació d'ona ens permet de calcular l'elongació de qualsevol punt x del medi a qualsevol instant t. És una funció de dues variables: la posició x i el temps t.

b) L'elongació del punt x = 4 cm és: $y = 3\sin(8\pi t - \frac{\pi}{4}4)$ → $y = 3\sin(8\pi t - \pi)$

Derivant l'elongació respecte el temps, tindrem la velocitat v de vibració: $v = 24\pi\cos(8\pi t - \pi)$

i per t = 1,2 s: $v = 24\pi\cos(8\pi 1{,}2 - \pi)$ que ens dóna:

$$v = 24\pi\cos(9{,}6\pi - \pi) = 24\pi\cos 8{,}6\pi = 24\pi\cos(8\pi + 0{,}6\pi) = 24\pi\cos 0{,}6\pi = -23{,}3 \quad cm/s$$

Aquesta velocitat <u>v</u> de vibració no s'ha de confondre amb la velocitat <u>c</u> (constant) de propagació de l'ona.

c) La fase és l'angle $\varphi = (\omega t - kx)$ que determina l'estat de vibració de cada punt x del medi a cada instant t.

Si dos punts x_1, x_2, en un cert instant estan en fase, és a dir tenen, la mateixa elongació, velocitat i acceleració, vol dir que els seus angles de fase φ tenen el mateix sinus i el mateix cosinus, la diferència de fase serà: $\Delta\varphi = 2\pi n$ i la distància entre aquests dos punts és: $\Delta x = n\lambda$.

Si un punt del medi en un instant t té un cert estat de vibració i al cap d'un temps Δt torna a tenir el mateix estat de vibració és que la diferència de fase és: $\Delta\varphi = 2\pi n$ i el temps que ha passat és: $\Delta t = nT$.

És evident, per tant, que la diferència de fase $\Delta\varphi$ entre dos punts del medi en el mateix instant o entre dos instants d'un mateix punt complirà la relació següent:

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Ja podem fer càlculs: $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}2\pi = \frac{12-10}{8}2\pi = \frac{\pi}{2}$

d) Anàlogament trobarem la diferència de fase entre dos instants d'un mateix punt:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T}2\pi = \frac{2{,}6-2{,}4}{1/4}2\pi = \frac{8\pi}{5}$$

Evidentment, també hauríem pogut calcular les diferències de fase anteriors amb l'angle de l'equació d'ona:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o = (8\pi t - \frac{\pi}{4}10) - (8\pi t - \frac{\pi}{4}12) = \frac{12\pi}{4} - \frac{10\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o = (8\pi 2{,}6 - \frac{\pi}{4}x) - (8\pi 2{,}4 - \frac{\pi}{4}x) = (2{,}6-2{,}4)8\pi = 0{,}2\cdot 8\pi = 0{,}16\pi = \frac{8\pi}{5}$$

---

5. Un moviment harmònic simple té l'elongació següent: x = 5 cos(20t +1) en cm i segons. Calcula:
a) Període, freqüència i velocitat quan l'elongació és x = 3 cm.
b) Velocitat quan el temps és t = 0,1 s.

a) Si expressem l'elongació amb el cosinus, l'equació és: $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$

Comparant amb l'equació donada, tenim: $A = 5 \ cm, \ \omega = 20 \ s^{-1}, \ \varphi = 1 \ rad$.

El període: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ → $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}314 \ s$ i la freqüència: $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ → $f = \frac{1}{T} = \frac{10}{\pi} = 3{,}18 \ Hz$

La velocitat quan x = 3 cm $\boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$ → $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 20\sqrt{5^2 - 3^2} = 20\cdot 4 = 80 \ cm/s$

b) Per trobar la velocitat quan t = 0,1 s, caldrà derivar l'elongació respecte al temps: $\boxed{v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -20\cdot 5\sin(20t + 1) = -100\sin(20\cdot 0{,}1 + 1) = -100\sin 3 = -14{,}11 \ cm/s$$