1. El focus d'un moviment ondulatori vibra amb un MHS d'una amplitud A = 5 cm i una freqüència f = 200 Hz. La velocitat de propagació de l'ona és c = 100 m/s.
a) Escriu l'equació d'ona.
b) Compara l'estat de vibració d'un punt A del medi situat a x_A = 40 cm amb el punt B situat a x_B = 140 cm i amb el punt C situat a x_C = 115 cm.
c) Escriu l'equació de la velocitat de vibració del punt A.

a) L'equació d'una ona harmònica és: $\boxed{y = A\sin(\omega t \pm kx)}$ Necessitarem tres constants: l'amplitud A, la freqüència angular ω i el nombre d'ones k.

L'amplitud ja sabem que és: $A = 0{,}05\ \ m$. La freqüència angular. $\boxed{\omega = 2\pi f}$ → $\omega = 2\pi f = 2\pi 200 = 400\pi\ \ s^{-1}$

La longitud d'ona: $\boxed{c = \lambda f}$ → $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{100}{200} = 0{,}5\ \ m = 50\ \ cm$

El nombre d'ona: $\boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$ → $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ \ m^{-1}$

Ja tenim l'equació d'ona: $y = 0{,}05\sin(400\pi t - 4\pi x)\ \ en\ \ m\ \ i\ \ seg$

b) Per comparar l'estat de vibració de dos punts cal veure quantes semilongituds d'ona els separen. Farem servir la fórmula següent:

$$\boxed{|x_B - x_A| = \alpha\frac{\lambda}{2}}$$

Si el valor del paràmetre α és parell, la distància entre els punts serà un nombre enter de longituds d'ona i, per tant, els punts vibraran en fase, és a dir, a cada instant tindran la mateixa elongació, la mateixa velocitat i la mateixa acceleració. Igualment si α = 0 perquè llavors seran dos punts a la mateixa distància del focus.

Si α = imparell vol dir que el punt es comporta com si estigués a la distància d'una semilongitud d'ona i, per tant, vibraran en oposició de fase. És a dir, a cada instant tindran la mateixa elongació, la mateixa velocitat i la mateixa acceleració però de signes contraris.

Mirem els punts A i B: $\alpha = 2\dfrac{|x_B - x_A|}{\lambda} = 2\dfrac{|140-40|}{50} = 4$ → α = parell → els punts A i B estan en fase.

Mirem els punts A i C: $\alpha = 2\dfrac{|x_C - x_A|}{\lambda} = 2\dfrac{|115-40|}{50} = 3$ → α = imparell → els punts A i C estan en oposició de fase.

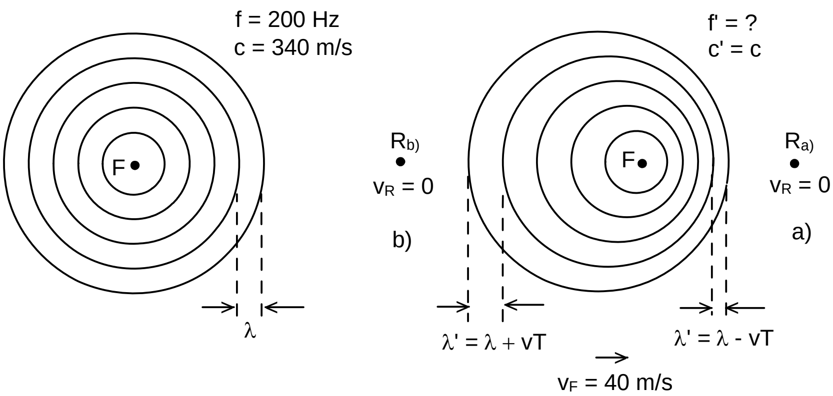
c) La velocitat de vibració és la derivada de l'equació d'ona respecte al temps:

$\boxed{v = \dfrac{dy}{dt}}$ → $v = 0{,}05 \cdot 400\pi\cos(400\pi t - 4\pi x) = 20\pi\cos(400\pi t - 4\pi x)$

I si es tracta del punt x = 0,40 m → $v = 20\pi\cos(400\pi t - 4\pi 0{,}4)$ → $v = 20\pi\cos(400\pi t - 1{,}6\pi)\ \ en\ \ m\ \ i\ \ seg$

---

2. Un focus sonor emet un so de freqüència f = 200 Hz. Calcula la freqüència amb què arriba el so al receptor en els casos següents:
a) El receptor està quiet i el focus se li acosta. b) El receptor està quiet i el focus se'n allunya.
c) El focus està quiet i el receptor li acosta. d) El focus està quiet i el receptor se n'allunya.
La velocitat de propagació del so és c = 340 m/s.



a) i b) Dibuixem el so suposant que el focus està quiet i, al costat, en el cas que el focus s'acosta a un receptor $R_{a)}$ i s'allunya de l'altre $R_{b)}$.

La distància entre dos fronts d'ona és la longitud d'ona λ, per tant, el temps que hi ha des que arriba un front d'ona fins que arriba el següent és d'un període T.

El fet que el focus es mogui no fa variar la velocitat de propagació perquè aquesta velocitat només depèn de les propietats del medi. Per tant: c' = c.

La longitud d'ona λ' sí que varia. És més petita quan el focus s'acosta i més grossa quan s'allunya perquè en el temps d'un període T el focus s'ha desplaçat un tros vT i per tant, la longitud d'ona disminueix o augmenta en un tros vT.

Necessitarem calcular el període: $\boxed{T = \frac{1}{f}}$ → $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{200} = 0{,}005 \ \ seg$

I la longitud d'ona de quan el focus no es mou: $\boxed{c = \lambda f}$ → $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{200} = 1{,}7 \ \ m$. Ja podem fer càlculs:

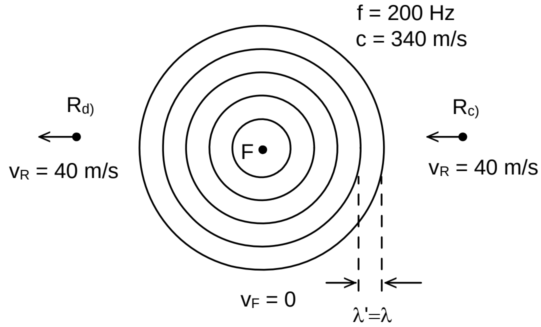
Freqüència f' en el cas a): $c' = c = 340 \ \ m/s$

$$\lambda' = \lambda - vT = 1{,}7 - 40 \cdot 0{,}005 = 1{,}7 - 0{,}2 = 1{,}5 \ \ m \rightarrow \quad f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda'} = \frac{340}{1{,}5} = 226{,}7 \ \ Hz$$

Freqüència f' en el cas b): $c' = c = 340 \ \ m/s$

$$\lambda' = \lambda + vT = 1{,}7 + 40 \cdot 0{,}005 = 1{,}7 + 0{,}2 = 1{,}9 \ \ m \rightarrow \quad f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda'} = \frac{340}{1{,}9} = 178{,}9 \ \ Hz$$

c) i d) En el dibuix ja veiem que la longitud d'ona no varia quan el receptor es mou. La velocitat de propagació sí que varia perquè quan s'hi acosta la velocitat relativa és la suma c' = c + v i quan s'allunya és c' = c – v. Tindrem:



Freqüència f' en el cas c): $c' = c + v = 340 + 40 = 380 \ \ m/s$

$$\lambda' = \lambda = 1{,}7 \ \ m \rightarrow \quad f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c'}{\lambda} = \frac{380}{1{,}7} = 223{,}5 \ \ Hz$$

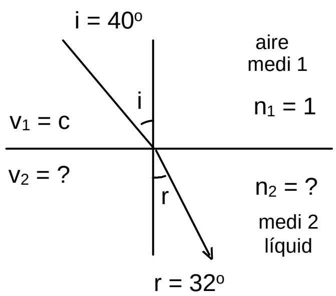
Freqüència f' en el cas d): $c' = c - v = 340 - 40 = 300 \ \ m/s$

$$\lambda' = \lambda = 1{,}7 \ \ m \rightarrow \quad f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c'}{\lambda} = \frac{300}{1{,}7} = 176{,}5 \ \ Hz$$

---

3. Un raig de llum incideix sobre un líquid amb un angle i = 40° i es refracta amb un angle r = 32°. Calcula:

a) L'índex de refracció del líquid i la velocitat de propagació de la llum pel líquid.
b) L'angle de refracció quan el d'incidència és de 54°.
c) L'angle límit del líquid.



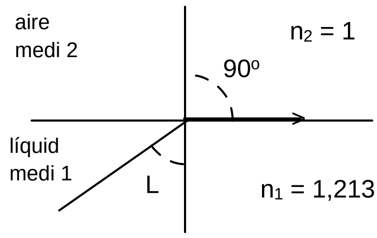
a) La llei de la refracció és: $\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}}$

$$n_2 = \frac{\sin i}{\sin r} n_1 = \frac{\sin 40^o}{\sin 32^o} 1 = 1{,}213 \qquad v_2 = \frac{\sin 32^o}{\sin 40^o} 3 \cdot 10^8 = 2{,}47 \cdot 10^8 \ \ m/s$$

La velocitat també la podem trobar a partir de l'índex de refracció del líquid: $\boxed{n_2 = \frac{c}{v_2}}$ → $v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}213} = 2{,}47 \cdot 10^8 \ \ m/s$

b) L'angle de refracció quan i = 54° serà: $\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i$ → $r = \arcsin \frac{n_1}{n_2} \sin i = \arcsin \frac{1}{1{,}213} \sin 54^o = 41{,}83^o$

c) Mirant les dades tal com tenim ara a la figura, la fórmula de la refracció serà:



$$\frac{\sin L}{\sin 90^o} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \quad L = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \sin 90^o = \arcsin \frac{1}{1{,}213} 1 = 55{,}53^o$$

---

4. Un metall té una longitud d'ona llindar de l'efecte fotoelèctric de 60 A^o (angstroms). Ara l'il·luminem amb llum de freqüència f = $6 \cdot 10^{16}$ Hz. Calcula:

a) La funció de treball.
b) L'energia cinètica i la velocitat que tindran els electrons emesos.
c) El potencial de tall.

Constant de Planck : h = $6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J·s = $4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV.s. Massa de l'electró: $m_e = 9{,}107 \cdot 10^{-31}$ kg.
Càrrega de l'electró: $q_e = 1{,}6 10^{-19}$ C. 1 A = 10^{-10} m

a) Amb la longitud d'ona llindar podem calcular la funció de treball W que és l'energia necessària per arrencar un electró del metall. Necessitem primer la freqüència llindar:

$$\boxed{c = \lambda f} \rightarrow f_o = \frac{c}{\lambda_o} = \frac{3 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^{-10}} = 5 \cdot 10^{16} \ Hz$$

La funció de treball és: $\boxed{W = hf_o} \rightarrow W = hf_o = 4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 5 \cdot 10^{16} s^{-1} = 207 \ eV$

b) Calculem primer l'energia d'un fotó: $\boxed{U_o = hf} \rightarrow U_o = hf = 4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 6 \cdot 10^{16} s^{-1} = 248{,}4 \ eV$

L'energia d'un electró emès és l'energia del fotó absorbit menys la funció de treball:

$$U_e = U_o - W = 248{,}4 - 207 = 41{,}4 \ eV$$

Per calcular la velocitat necessitem tenir l'energia en joules: $U_e = 41{,}4 \ eV \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \ J}{1 \ eV} = 6{,}624 \cdot 10^{-18} \ J$

La velocitat serà: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}624 \cdot 10^{-16}}{9{,}107 \cdot 10^{-31}}} = 3{,}81 \cdot 10^7 \ m/s$

c) El potencial de tall és la diferència de potencial que cal aplicar-hi per tal que no surtin electrons del metall il·luminat, és a dir, que hem de calcular el potencial necessari per parar els electrons emesos. L'energia cinètica que tenen en sortir es converteix en energia potencial elèctrica. Els electrons tornen endarrere cap al metall del què han sortit.

$$U_c = q(V - V_o) = eV \rightarrow V = \frac{U_c}{e} = \frac{41{,}4 \ eV}{e} = 41{,}4 \ V$$

Podíem haver agafat l'energia en joules: $V = \frac{U_c}{q} = \frac{U_c}{e} \frac{6{,}624 \cdot 10^{-18} \ J}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \ C} = 41{,}4 \ V$

---

5. Calcula la longitud d'ona de De Broglie per un electró accelerat amb una diferència de potencial de 20 V.

Constant de Planck : h = $6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J·s. Massa de l'electró: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.
Càrrega de l'electró: $q_e = 1{,}6 10^{-19}$ C.

Calculem l'energia cinètica de l'electró: $U = qV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 20 = 3{,}2 \cdot 10^{-18} \ J$

i la velocitat: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-18}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 2{,}65 \cdot 10^6 \ m/s$.

La longitud d'ona és: $\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}} \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}65 \cdot 10^6} = 2{,}9 \cdot 10^{-10} \ m = 2{,}9 \ A^o$
