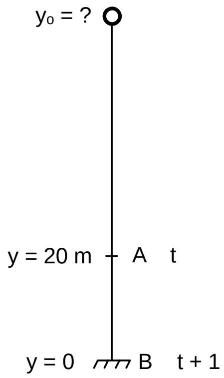
1. Un cos cau des d'una certa altura i per fer els darrers 20 m abans de tocar a terra tarda 1 segon. Calcula:
a) L'altura inicial. b) El temps total de caiguda. c) La velocitat final en arribar a terra. (Agafa g = - 10 m/s^2)



a) Com que $v_o = 0$, l'equació de la posició és: $y = y_o - 5t^2$

L'apliquem al punt A: $y = 20$ → $20 = y_o - 5t^2$

I al punt B: $y = 0$ → $0 = y_o - 5(t+1)^2$

Restem: $20 = -5t^2 + 5(t+1)^2$ → $20 = -5t^2 + 5t^2 + 10t + 5$ i tenim el temps → $t = 1{,}5\ s$

Amb el temps, calculem la posició inicial y_o fent servir qualsevol de les equacions que tenim:

La del punt A: $20 = y_o - 5 \cdot 1{,}5^2$ → $y_o = 20 + 5 \cdot 1{,}5^2 = 31{,}25\ m$

o la del punt B: $0 = y_o - 5(1{,}5+1)^2$ → $y_o = 5(1{,}5+1)^2 = 31{,}25\ m$

b) Sabent la posició inicial, ja podem escriure l'equació de la posició: $y = 31{,}25 - 5t^2$ i calcular el temps t de caiguda, o sigui quan y = 0. $0 = 31{,}25 - 5t^2$ → $t = 2{,}5\ s$

c) L'equació de la velocitat és: $v = -10t$ i, a terra, quan t = 2,5 s, → $v = -10 \cdot 2{,}5 = -25\ m/s$

També podíem haver imaginat que tiravem el cos avall des del punt A, és a dir, des d'una altura inicial $y_{o,A}$ = 20 m i una velocitat inicial $v_{o,A}$ que ara podrem calcular. Ho farem amb l'equació de la posició:

$y = 20 + v_{o,A}t - 5t^2$ → a terra y = 0 i t = 1 s → $0 = 20 + v_{o,A}1 - 5 \cdot 1^2$ → $v_{o,A} = -20 + 5 = -15\ m/s$

Sabent ara la velocitat al punt A, trobarem el tros que ha baixat abans: $\Delta y = \dfrac{v_A^2 - v_o^2}{2g} = \dfrac{0 - 15^2}{2(-10)} = 11{,}25\ m$

I l'altura inicial: $y_o = y + \Delta y = 20 + 11{,}25 = 31{,}25\ m$

Amb la fórmula dels quadrats, calculem la velocitat final: $v = \sqrt{v_{o,A}^2 + 2g\Delta y} = \sqrt{15^2 + 2(-10)(-20)} = -25\ m/s^2$

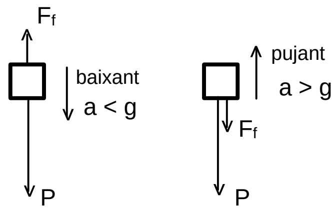
I amb l'equació de la velocitat, calcularem el temps: $v = v_o + gt$ → $t = \dfrac{v - v_o}{g} = \dfrac{-25 - 0}{-10} = 2{,}5\ s$

---

2. Disparem un cos amunt, des de terra, amb una velocitat inicial de 80 m/s. Hi ha fregament amb l'aire i per això, al cap de 2 segons, l'altura a què es troba és de 136 m. Calcula:
a) L'altura màxima a què arribarà. b) La velocitat final quan torni a terra.

Tinguem present que quan hi ha fregament amb l'aire, a més a més del pes hi actua la força de fregament que, quan el cos puja va a favor del pes i augmenta el mòdul de l'acceleració i, quan el cos baixa, va en contra i el disminueix. Fem la suposició que la força de fregament amb l'aire és constant independentment de la velocitat.

Cal i no oblidar mai que si hi ha fregament amb l'aire → $\boxed{a \neq g}$



Sabem les constants $y_o = 0$ i v_o = 80 m/s. L'equació de la posició ens queda:

$y = 80t + \frac{1}{2}at^2$ Ara ja podem trobar l'acceleració:

quan t = 2 s → $136 = 80 \cdot 2 + \frac{1}{2}a \cdot 2^2$ → $a = \dfrac{136 - 160}{2} = -12\ m/s^2$

escriure les equacions: $\left| \begin{array}{l} y = 80t - 6t^2 \\ v = 80 - 12t \end{array} \right.$ i ja podem respondre les preguntes del problema:

a) Altura màxima → v = 0 → $0 = 80 - 12t$ → $t = \dfrac{80}{12} = 6{,}\widehat{6}\ s$ → $y_{màx} = 80 \cdot 6{,}\widehat{6} - 6 \cdot 6{,}\widehat{6}^2 = 266{,}\widehat{6}\ m$

b) Al pujar hem trobat el mòdul de l'acceleració
a > g → a = g + 2 = 10 + 2 = 12 m/s^2, al baixar a < g → a = g – 2 = 10 – 2 = 8 m/s^2.

La velocitat final serà: $v = \sqrt{2a\Delta y} = \sqrt{2 \cdot (-8)(0 - 266{,}\widehat{6})} = -65{,}32\ m/s$

---

3. Des de terra disparem un projectil amb una velocitat de 100 m/s i un angle α = 30°. Calcula els components intrínsecs de l'acceleració quan t = 8 segons.

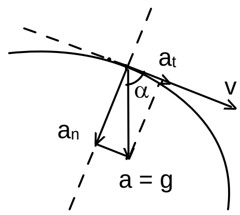
Hem de tenir la velocitat. La inicial és: $\vec{v}_o \left| \begin{array}{l} v_{o,x} = 100\cos 30^o = 86{,}6 \ \ m/s \\ v_{o,y} = 100\sin 30^o = 50 \ \ m/s \end{array} \right.$ → $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_{o,x} = 86{,}6 \\ v_{o,y} = 50 - 10t \end{array} \right.$

Quan t = 8 s → $\vec{v} = (86{,}6, \ -30) \ \ m/s$ i el mòdul: $v = \sqrt{86{,}6^2 + 30^2} = 65{,}32 \ \ m/s^2$

L'acceleració a qualsevol instant: $\vec{a} = (0, \ -10) \ \ m/s^2$ i el mòdul a = 10

Ara buscarem l'angle entre aquests dos vectors: $\vec{v}$ i $\vec{a}$

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{a\cdot v} = \arccos\frac{(0, \ 10)(86{,}6, \ 50)}{10\cdot 91{,}65} = 70{,}9^o$$

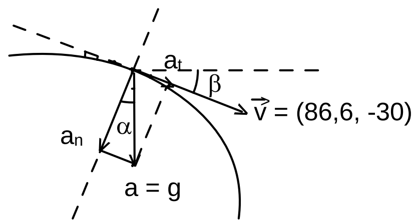


Projectant l'acceleració $\vec{a}$ sobre la direcció tangent, tindrem l'acceleració tangencial a_t i projectant-la sobre la normal, tindrem l'acceleració normal a_n:

$$a_t = 10\cdot\cos 70{,}9^o = 3{,}27 \ \ m/s^2 \quad \text{i} \quad a_n = 10\cdot\sin 70{,}9^o = 9{,}45 \ \ m/s^2$$

Tractant-se d'un projectil oblic en què l'acceleració és vertical, també podíem primer buscar l'angle β que fa la velocitat amb l'horitzontal:

$$\beta = arctg\frac{30}{86{,}6} = 19{,}1^o$$



I com que $\beta = \alpha$ perquè són angles de costats perpendiculars, llavors fem les projeccions adients per trobar les acceleracions:

$$a_t = 10\cdot\sin 19{,}1^o = 3{,}27 \ \ m/s^2 \quad \text{i} \quad a_n = 10\cdot\cos 19{,}1^o = 9{,}45 \ \ m/s^2$$

Una tercera manera de fer seria tenir en compte que l'acceleració tangencial a_t és la derivada del mòdul de la velocitat.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{86{,}\widehat{6}^2 + (50-10t)^2} = \sqrt{100t^2 - 1.000t + 9.999{,}56}$$

$a_t = \dfrac{200t - 1.000}{2\sqrt{100t^2 - 1.000t + 9.999'56}}$ quan t = 8 → $a_t = \dfrac{200\cdot 8 - 1.000}{2\sqrt{100\cdot 8^2 - 1.000\cdot 8 + 9.999'56}} = 3{,}27 \ \ m/s^2$

I, per Pitàgores, tenim l'acceleració normal: → $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{10^2 - 3{,}27^2} = 9{,}45 \ \ m/s^2$