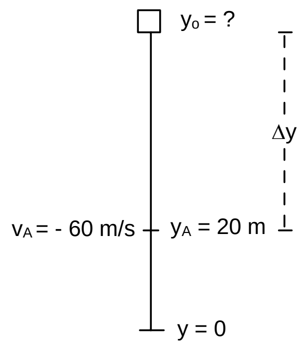
1. Des d'una certa altura, deixem anar un cos i quan falten 20 m per arribar a terra, la velocitat és de 60 m/s. Calcula: a) L'altura inicial. b) La velocitat final. c) El temps total de caiguda.



a) Farem les equacions del moviment:
$$\left| \begin{array}{l} y = y_o - 5t^2 \\ v = -10t \end{array} \right.$$

Ara les apliquem al punt y = 20 m → v = -60 m/s → $-60 = -10t$ → $t = 6\ \ s$

sabent el temps, ja podem calcular y_o: $y_o = y + 5t^2 = 20 + 5{\cdot}6^2 = 200\ \ m$

També podíem haver calculat el tros Δy així: $\Delta y = \dfrac{v^2 - v_o^2}{2g} = \dfrac{(-60)^2 - 0}{2(-10)} = -180\ \ m$

I sumar aquests 180 m que ha baixat als 20 que li falten: $y_o = 180 + 20 = 200\ \ m$

b) Amb la fórmula dels quadrats, tindrem la velocitat final:
$$v = \sqrt{v_o^2 + 2g(y - y_o)} = \sqrt{0 + 2(-10)(0 - 200)} = \sqrt{4.000} = -63{,}25\ \ m/s$$

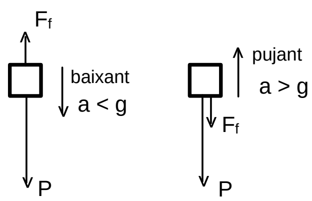
c) Podem calcular el temps total amb l'equació de la velocitat: $v = -10t$ → $t = \dfrac{v}{-10} = \dfrac{-63{,}25}{-10} = 6{,}325\ \ s$

o amb la de la posició: $y = y_o - 5t^2$ → $t = \sqrt{\dfrac{y - y_o}{-5}} = \sqrt{\dfrac{0 - 200}{-5}} = \sqrt{40} = 6{,}325\ \ s$

---

2. Deixem anar un cos des d'una altura de 100 m i, com que hi ha fregament amb l'aire, al cap de 2 segons es troba a 82 m. Calcula:
a) La velocitat quan arriba a terra. b) L'altura màxima a què arribaria si ara el disparéssim verticalment amunt a 66 m/s.

Primer hem de calcular l'acceleració a de baixada. Ho farem amb l'equació de la posició:



$$y = 100 + \frac{1}{2}at^2 \ \rightarrow\ 82 = 100 + \frac{1}{2}a2^2 \ \rightarrow\ a = \frac{82 - 100}{2} = -9\ \ m/s^2$$

a) Les equacions de baixada són:
$$\left| \begin{array}{l} y = 100 - 4{,}5t^2 \\ v = -9t \end{array} \right.$$

a terra → $0 = 100 - 4{,}5t^2$ → $t = 4{,}71\ \ s$ → $v = -9{\cdot}4{,}71 = -42{,}43\ \ m/s$

b) Al pujar l'acceleració és: $a = -(10 + 1) = -11\ \ m/s^2$

Ja sabem que al pujar l'acceleració augmenta en mòdul tant com havia disminuït al baixar.

Ara les equacions seran:
$$\left| \begin{array}{l} y = 66t - 5{,}5t^2 \\ v = 66 - 11t \end{array} \right.$$

$y_{màx}$ → $v = 0$ → $0 = 66 - 11{\cdot}t$ → $t = 6\ \ s$

$$y_{màx} = y_{t=6s} = 666{\cdot}6 - 5{,}5{\cdot}6^2 = 198\ \ m$$

---

3. Des de 400 m d'altura disparem un projectil horitzontalment amb una velocitat de 100 m/s. Calcula els components intrínsecs de l'acceleració quan l'altura és de 220 m.

La velocitat inicial és: $\vec{v}_o = (100,\ 0)$, la posició és: $\vec{r}\ \left| \begin{array}{l} x = 100t \\ y = 200 - 5t^2 \end{array} \right.$ i la velocitat: $\vec{v}\ \left| \begin{array}{l} v_x = 100 \\ v_y = -10t \end{array} \right.$

Quan l'altura és y = 220 m: → $220 = 200 - 5t^2$ → $t = 6\ \ s$

la velocitat: → $\vec{v} = (100,\ -60)\ \ m/s$ i el seu mòdul: $v = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116{,}62\ \ m/s$

l'acceleració: → $\vec{a} = (0,\ -10)\ \ m/s^2$ i el seu mòdul: $a = 10\ \ m/s^2$

Podem calcular l'acceleració tangencial i la normal de tres maneres:

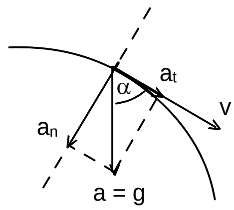
1. Amb l'angle α entre la velocitat i l'acceleració:

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v\cdot a} = \arccos\frac{(100,\ -60)(0,\ -10)}{116{,}62\cdot 10} = \arccos\frac{100\cdot 0 + (-60)(-10)}{116{,}62\cdot 10} = \arccos\frac{600}{1.166{,}2} = 59'04^o$$

Ara projectem l'acceleració sobre la direcció tangent i sobre la direcció normal a la trajectòria i tindrem els mòduls de les acceleracions:

$$a_t = a\cdot\cos\alpha = 10\cdot\cos 59'04^o = 5{,}14\ \ m/s^2$$

$$a_n = a\cdot\sin\alpha = 10\cdot\sin 59{,}04^o = 8{,}58\ \ m/s^2$$



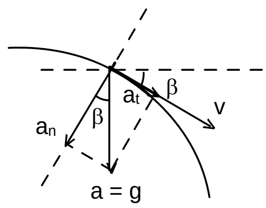
2. Amb l'angle β entre l'acceleració normal a_n i la total g. Aquest angle és igual al que fa la velocitat amb l'horitzontal perquè són angles de costats perpendiculars:

$$\beta = arctg\,\frac{60}{100} = 30{,}96^o$$

Fent les projeccions corresponents, tindrem les acceleracions:

$$a_t = a\sin\beta = 10\sin 30{,}96^o = 5{,}14\ \ m/s^2$$

$$a_n = a\cos\beta = 10\cos 30{,}96^o = 8{,}57\ \ m/s^2$$



3. Derivant el mòdul de la velocitat respecte al temps, tindrem, per definició, l'acceleració tangencial:

$$\vec{v} = (100,\ -10t) \rightarrow\ v = \sqrt{100^2 + (-10t)^2} = \sqrt{100t^2 + 10.000}$$

$$a_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{100t^2 + 10.000} = \frac{200t}{2\sqrt{100t^2 + 10.000}} = \frac{200\cdot 6}{2\sqrt{100\cdot 6^2 + 10.000}} = \frac{600}{\sqrt{13.600}} = 5{,}145\ \ m/s^2$$

i per Pitàgores la normal: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{10^2 - 5{,}145^2} = 8{,}57\ \ m/s^2$ [1]

---

[1] Hem donat els resultats amb 2 o 3 decimals per tal de constatar la coincidència que hi ha entre ells, sigui quin sigui el camí seguit. Realment no seria lògic havent pres la gravetat g = -10 m/s^2 en comptes de -9,8 m/s^2.