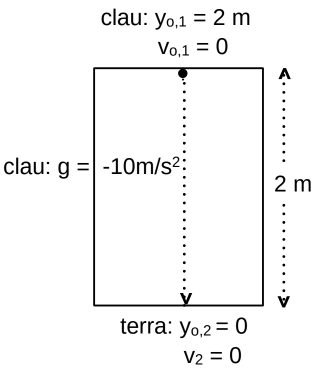
1. Un ascensor de 2 m d'alçada puja a la velocitat de 2 m/s. Si ara es desprèn un clau del sostre, calcula:
a) El temps que tarda a arribar a terra i la velocitat final si l'observador es troba a dins de l'ascensor.
b) La velocitat final i el temps si l'observador és a fora.
c) Compara les velocitats, les acceleracions i els temps que s'han trobat des de dins i des de fora i explica les diferències.

a) Si l'observador va a dins de l'ascensor vol dir que el sistema de referència és el propi ascensor. S'ha de fer el problema imaginant que l'ascensor està quiet ja que el sistema de referència sempre es suposa immòbil. Tot passa com si deixéssim anar un clau des d'una altura y_o = 2 m i v_o = 0. L'acceleració del clau és g = -10 m/s^2, tant de dins com de fora perquè l'ascensor es mou a velocitat constant.



Quan un sistema de referència està realment en repòs (si es pot dir que hi ha res en repòs) o es mou a velocitat constant, es diu que és un sistema de referència ***inercial***. En aquest cas, la velocitat v i la posició y del mòbil (aquí el clau) seran diferents segons es miri de dins o de fora de l'ascensor però l'acceleració, que és la variació de la velocitat, i el temps seran els mateixos. La velocitat varia igual tant si es mira des d'un sistema com des de l'altre. Per això l'acceleració és la mateixa.

Farem les equacions del moviment del clau amb les dades que hem dit i que ja hem posat a la figura.

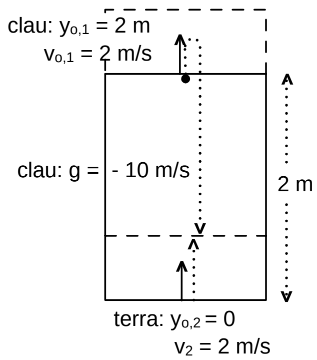
a) Posició del clau: $y = 2 - 5t^2$ → a terra: $y = 0$ → $0 = 2 - 5t^2$ → $t = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}632\ s$

Sabent ara el temps t que tarda a arribar a terra, tenim la velocitat final:

$$v = -10t = -10{\cdot}0{,}632 = -6{,}32\ \ m/s$$

b) Si l'observador és a fora, el clau tindrà un a altura inicial y_o = 2 m i una velocitat inicial v_o = 2 m/s. L'acceleració és g = - 10 m/s^2 tal com hem dit. Al mateix temps, el terra de l'ascensor puja amb un MRU de velocitat constant v_2 = 2 m/s. Cal fer les equacions de tots dos mòbils:

El clau: $\left| \begin{array}{l} y_1 = 2 + 2t - 5t^2 \\ v_1 = 2 - 10t \end{array} \right.$ el terra: $\left| \begin{array}{l} y_2 = 2t \\ v_2 = 2 \end{array} \right.$



Quan el clau arriba a terra: $y_1 = y_2$ → $2 + 2t - 5t^2 = 2t$ → $t = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}632\ s$

En aquest instant, el clau té una velocitat: $v_1 = 2 - 10{\cdot}0{,}632 = -4{,}32\ \ m/s^2$

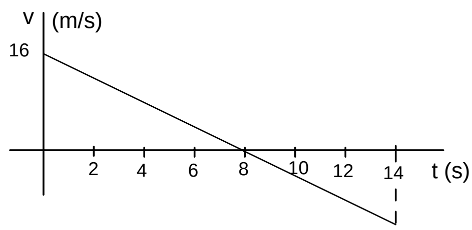
c) Ja veiem que els temps són els mateixos per tots dos observadors. Ja ho sabíem. I les velocitats tenen una diferència $\Delta v = 2\ \ m/s$ que és la velocitat de l'ascensor observat des de fora. Realment no calia fer els càlculs que hem fet, ja teníem els resultats.

També, amb les equacions que tenim, podríem haver buscat la posició final, quan t = 0,632 s, del clau i del terra de l'ascensor. Ja veiem que han de coincidir:

El clau: $y_1 = 2 + 2{\cdot}0{,}632 - 5{\cdot}0{,}632^2 = 1{,}27\ \ m$ i el terra: $y_2 = 2{\cdot}0{,}632 = 1{,}27\ \ m$

---

2. El gràfic ens diu la velocitat un mòbil que fa un MR per l'eix x. La posició inicial és 20 m.
a) Explica què fa aquest mòbil durant aquest temps segons el gràfic.
b) Escriu les equacions del seu moviment i fes el gràfic x-t.
c) Calcula la velocitat, la posició, l'espai recorregut i el desplaçament quan t = 12 s.



a) <u>De t = 0 a t = 8 s:</u>
Surt de la posició x_o = 20 m amb una velocitat inicial v_o = 16 m/s. Com que la velocitat és positiva, sabem que va cap a la dreta
El pendent de la recta ens dóna l'acceleració que és a = - 2 m/s^2. Això vol dir que frena. Quan t = 8 s és para.
L'àrea a sota de la velocitat ens dóna l'espai recorregut: Δx =8·16/2 = 64 m. La posició final és x = xo + Δx = 20 + 64 = 84 m.

<u>De t = 8 a t = 14 s:</u>
De la posició inicial x = 84 m en surt amb velocitat v = 0 i va cap a l'esquerra amb la mateixa acceleració d'abans a = - 2 m/s^2. Hi ha el mateix pendent. Quan t = 14 s, la velocitat és v = 12 m/s.
L'àrea ens dóna un espai recorregut cap a l'esquerra: Δx = (14 – 8)·(-12)/2 = - 36 m. La posició final és: x = 84 – 36 = 48 m.

b) Sabent les constants: x_o = 20 m, v_o = 16 m/s i a = - 2 m/s^2, podem escriure les equacions d'aquest MRUV.

Posició: $x = x_o + v\ t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow x = 20 + 16t - t^2$ i velocitat: $v = v_o + at \rightarrow v = 16 - 2t$

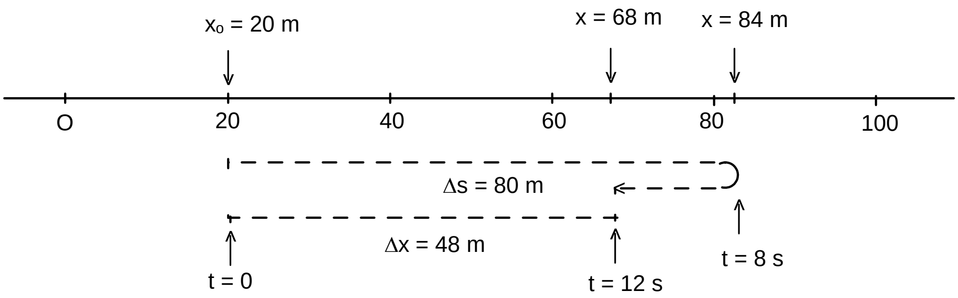
c) Quan t = 12 s: la posició és: $x = 20 + 16 \cdot 12 - 12^2 = 68\ \ m$ i la velocitat: $v = 16 - 2 \cdot 12 = -8\ \ m$

L'espai recorregut serà la suma del que ha fet cap a la dreta més el que ha fet cap a l'esquerra:

Calculem la posició quan t = 8 s. $x_1 = 20 + 16 \cdot 8 - 8^2 = 84\ \ m$ i quan t = 12 s $x_2 = 20 + 16 \cdot 12 - 12^2 = 68\ \ m$

Espai recorregut: $\Delta s = (84 - 20) + (84 - 68) = 64 + 16 = 80\ \ m$

Desplaçament: $\Delta x = x - x_o = 68 - 20 = 48\ \ m$



3. Des d'una altura de 480 m disparem un projectil amb una velocitat inicial de 100 m/s i una inclinació de 30^o. Calcula l'acceleració tangencial l'acceleració normal i el radi de curvatura de la trajectòria quan l'altura és de 360 m.

Calculem la velocitat inicial: $\vec{v}_o \left| \begin{array}{l} v_{o,x} = 100\cos 30^o = 86{,}6\ \ m/s \\ v_{o,y} = 100\sin 30^o = 50\ \ m/s \end{array} \right.$

i els vectors de posició: $\vec{r} \left| \begin{array}{l} x = 86{,}6t \\ y = 480 + 50t - 5t^2 \end{array} \right.$ la velocitat: $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = 86{,}6 \\ v_y = 50 - 10t \end{array} \right.$ i l'acceleració: $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -10 \end{array} \right.$

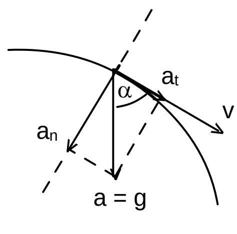
Si l'altura és y = 360 m $\rightarrow$ $360 = 480 + 50t - 5t^2$ el temps és: $t^2 - 10t - 24 = 0$ $\rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} t = 12\ \ s \\ t = -1\ \ s \end{array} \right.$

Caldrà buscar les acceleracions i el radi de curvatura quan t = 12 s. Primer calculem la velocitat:

$\vec{v} = (86{,}6,\ -70) \rightarrow v = \sqrt{86{,}6^2 + 70^2} = 111{,}35\ \ m/s$ i l'acceleració: $\vec{a} = (0,\ -10) \rightarrow a = 10\ \ m/s^2$

Les acceleracions i el radi de curvatura els podem trobar de tres maneres:

1. Amb l'angle α entre la velocitat i l'acceleració calcularem els components intrínsecs:

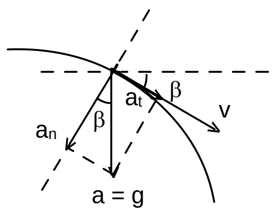


$$\alpha = \arccos\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{a \cdot v} = \arccos\frac{(0,-10)(86{,}6,\ -70)}{10 \cdot 111{,}35} = \arccos\frac{700}{1113'5} = 51^o$$

$$a_n = 10\sin 51^o = 7{,}78\ \ m/s^2 \qquad a_t = 10\cos 51^o = 6{,}29\ \ m/s^2$$

i el radi de curvatura de la trajectòria en aquest punt: $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{111{,}35^2}{7{,}78} = 1593{,}7\ \ m$

2. Amb l'angle β entre l'acceleració a = g i l'acceleració normal a_n que és el mateix que el que fa la velocitat amb l'horitzontal:



$$\beta = arctg\ \frac{70}{86{,}6} = 38{,}95^o$$

$$a_n = g\cos\beta = 10\cos 38{,}95^o = 7{,}78\ \ m/s^2 \qquad a_t = g\sin\beta = 10\sin 38{,}95^o = 6{,}29\ \ m/s^2$$

3. Derivant el mòdul de la velocitat, tindrem l'acceleració tangencial:

$$v = \sqrt{86{,}6^2 + (50 - 10t)^2} = \sqrt{100t^2 - 1.000t + 9.999{,}56} \quad \rightarrow \quad a_t = \frac{d}{dt}\sqrt{100t^2 - 1.000t + 9.999{,}56} \quad \rightarrow$$

$$a_t = \frac{200t - 1.000}{2\sqrt{100t^2 - 1.000t + 9.999{,}56}} = \frac{200 \cdot 12 - 1.000}{2\sqrt{100 \cdot 12^2 - 1.000 \cdot 12 + 9.999{,}56}} = \frac{1.400}{2\sqrt{12.399{,}56}} = 6{,}286 \ m/s^2$$

I per Pitàgores, la normal: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{10^2 - 6{,}286^2} = 7{,}78 \ m/s^2$