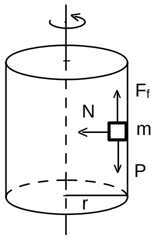
1. Un cilindre buit de radi r = 1 m gira al voltant del seu eix de simetria. A dins hi ha un cos petit que gira sense caure perquè entre ell i la paret interior del cilindre hi ha un fregament de coeficient μ = 0,4. Calcula la freqüència mínima amb què ha de rodar el cilindre perquè el cos no caigui.



Cal tenir present dues coses:
1. Si el cos no cau és perquè hi ha una força de fregament estàtic F_f entre el cos i paret interior del cilindre igual que el pes del cos P:

$$F_f = P \quad \rightarrow \quad \mu N = mg$$

2. La força normal N entre el cos i el cilindre, causant del fregament, és la força centrípeta F_c que fa girar el cos.

Amb tot això, ja podem aplicar-hi la 2ª llei i calcular la velocitat angular mínima ω:

$$N = F_c = ma_n = m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad \mu m\omega^2 r = mg \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}4\cdot 1}} = 5 \ rad/s$$

I la freqüència en r.p.m.: $f = \dfrac{\omega}{2\pi}60 = \dfrac{5}{2\pi}60 = 47{,}75 \ rpm$

---

2. Una roda gira a la seva freqüència normal de 1.200 rpm. Ara frena uniformement de manera que quan t = 30 s la seva freqüència baixa 300 rpm. Calcula: a) La velocitat angular quan t = 10 s. b) Les voltes que fa en total si continua frenant fins que es para, comptades des de l'instant inicial.

Es tracta d'un MCUV. Per fer les equacions que ens resoldran el problema, ens fan falta les velocitats angulars la inicial i la de t = 30 s:

t = 0 → $f_o = \dfrac{n}{t} = \dfrac{1.200}{60} = 20 \ rev/s \quad \rightarrow \quad \omega_o = 2\pi f_o = 2\pi 20 = 40\pi \ rad/s$

t = 30 s → $f = \dfrac{n}{t} = \dfrac{300}{60} = 5 \ rev/s \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 2\pi 5 = 10\pi \ rad/s$

i també l'acceleració angular: $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_o}{t} = \dfrac{10\pi - 40\pi}{30} = -\pi \ rad/s^2$

a) Ja podem escriure l'equació de la velocitat i calcular la velocitat angular ω quan t = 10 s:

$$\omega = \omega_o + \alpha t \quad \rightarrow \quad \omega = 40\pi - \pi\cdot t \quad \rightarrow \quad \omega = 40\pi - \pi\cdot t = 40\pi - \pi\cdot 10 = 30\pi \ rad/s$$

b) Primer calcularem el temps que tarda a parar-se, amb l'equació de la velocitat: $t = \dfrac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \dfrac{0 - 40\pi}{-\pi} = 40 \ s$

i ara, amb l'equació de la posició, l'angle recorregut:

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \rightarrow \quad \varphi = 40\pi t - \frac{\pi}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad \varphi = 40\pi\cdot 40 - \frac{\pi}{2}40^2 = 1.600\pi - 800\pi = 800\pi \ rad$$

i el nombre de voltes: $n = \dfrac{800\pi}{2\pi} = 400 \ rev$

També ho podíem haver fet amb la freqüència mitjana:

$$f_m = \frac{f_o + f}{2} = \frac{20+0}{2} = 10 \ rev/s \quad \rightarrow \quad f_m = \frac{n}{t} \quad \rightarrow \quad n = f_m t = 10\cdot 40 = 400 \ rev$$

---

3. Des d'una altura de 100 m disparem un projectil oblic amb una velocitat inicial v_o = 80 m/s. Calcula l'angle inicial amb què s'ha disparat si sabem que l'altura màxima és de 292 m.

Escrivim la velocitat inicial i els vectors velocitat i posició:

$$\vec{v}_o \left| \begin{array}{l} v_{o,x} = v_o \cos\alpha \\ v_{o,y} = v_o \sin\alpha \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_{o,x} \\ v_y = v_{o,y} - 10t \end{array} \right. \quad \vec{r} \left| \begin{array}{l} x = v_x t \\ y = 100 + v_y t - 5t^2 \end{array} \right.$$

L'altura màxima compleix: $\rightarrow \left| \begin{array}{l} v_y = 0 \\ y = 292 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = v_{o,y} - 10t \\ 292 = 100 + v_{o,y}t - 5t^2 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{o,y} = 10t \\ 292 = 100 + 10t\cdot t - 5t^2 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{o,y} = 10t \\ 192 = 5t^2 \end{array} \right.$

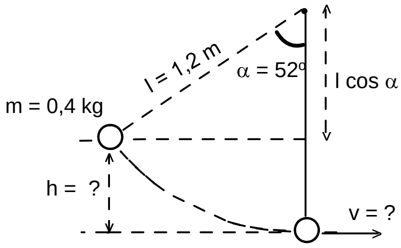
Ara ja podem calcular el temps t i, amb el temps, el component $v_{o,y}$ de la velocitat inicial i finalment l'angle inicial:

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{o,y} = 10t \\ t = \sqrt{\dfrac{192}{5}} = 6{,}2 \;\; s \end{array} \right. \quad \rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{o,y} = 10\cdot 6{,}2 = 62 \;\; m/s \\ v_{o,y} = v_o \sin\alpha \end{array} \right. \quad \rightarrow \;\; \alpha = \arcsin\frac{v_{o,y}}{v_o} = \arcsin\frac{62}{80} = 50{,}8^o$$

És immediat aplicant la fórmula dels quadrats a la direcció vertical: $v_{o,y} = \sqrt{-2g\Delta y} = \sqrt{-2(-10)(292-100)} = 62 \;\; m/s$ [1]

---

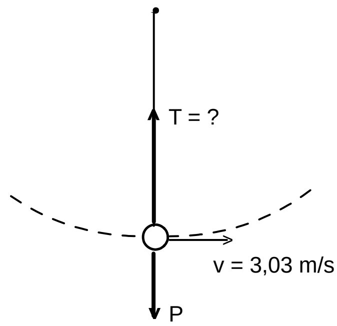
4. Un pèndol penjat al sostre té una massa m = 400 g i una longitud l = 1,2 m. Ara el separem de la posició d'equilibri de manera que el fil fa un angle de 52º amb la vertical i el deixem anar. Calcula la tensió del fil al punt més baix.[2]



Calculem l'altura inicial: $h = l - l\cos\alpha = 1{,}2 - 1{,}2\cdot\cos 52^o = 0{,}46 \;\; m$

Com que l'energia es conserva, podem calcular la velocitat al punt més baix:

$$U_{c,\,final} = U_{p,inic} \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{2}mv^2 = mgh \;\; \rightarrow \;\; v^2 = 2gh = 2\cdot 10\cdot 0{,}46 = 9{,}2 \;\; m^2/s^2$$



Al punt més baix hi ha dues forces: el pes P i la tensió T, de la mateixa direcció i de sentits contraris i totes dues perpendiculars a la velocitat. L'acció d'aquestes dues forces produiran una acceleració normal. Tindrem:

$$T - P = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad T = mg + m\frac{v^2}{r} = 0{,}4\cdot 10 + 0{,}4\frac{9{,}2}{1{,}2} = 7{,}07 \;\; N$$

---

5. Des de terra disparem un cos amunt amb una velocitat inicial de 60 m/s. Al mateix temps en deixem anar un altre d'igual (de la mateixa massa) des de 120 m d'altura. Els cossos xoquen elàsticament. Calcula les velocitats abans i després del xoc. [3]

Fem les equacions: les del cos 1 $\left| \begin{array}{l} y_1 = 60t - 5t^2 \\ v_1 = 60 - 10t \end{array} \right.$ i les del cos 2 $\left| \begin{array}{l} y_2 = 120 - 5t^3 \\ v_2 = -10t \end{array} \right.$

Quan es troben: $y_1 = y_2 \;\; \rightarrow \;\; 60t - 5t^2 = 120 - 5t^2 \;\; \rightarrow \;\; 6t = 120 \;\; \rightarrow \;\; t = 2 \;\; s$

i les velocitats en aquest instant t = 2 s, abans del xoc: $\left| \begin{array}{l} v_1 = 60 - 10t = 60 - 10\cdot 2 = 40 \;\; m/s \\ v_2 = 10t = -20 \;\; m/s \end{array} \right.$

Si xoquen elàsticament: $\left| \begin{array}{l} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'} \\ v_1 + v_1^{'} = v_2 + v_2^{'} \end{array} \right.$ com que $m_1 = m_2$, ens queda $\left| \begin{array}{l} v_1 + v_2 = v_1^{'} + v_2^{'} \\ v_1 + v_1^{'} = v_2 + v_2^{'} \end{array} \right.$

Sumant les igualtats anteriors, obtenim: $2v_1 = 2v_2^{'} \;\; \rightarrow \;\; v_2^{'} = v_1 = 40 \;\; m/s$

i restant-les: $2v_2 = 2v_1^{'} \;\; \rightarrow \;\; v_1^{'} = v_2 = -20 \;\; m/s$

Ja veiem que hi ha hagut un intercanvi de velocitats. És evident que això passarà sempre que xoquin elàsticament dos cossos de masses iguals.

---

1 - Idea dels alumnes Jofre Espigulé i Leila Alba.
2 - És el problema 6 de la secció "Energia" d'aquesta pàgina WEB www.catfisica.com.
3 - És el problema 12 de la secció "Xocs" de www.catfisica.com.