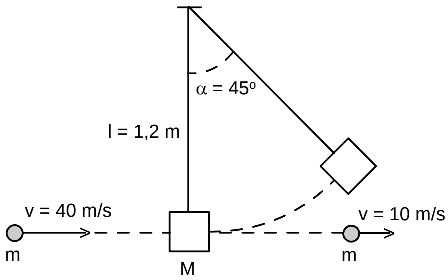
1. Disparem una bala m = 200 g horitzontalment a la velocitat v = 40 m/s. La bala travessa la massa M d'un pèndol vertical d'1,2 m de longitud que està en repòs i la bala, quan surt, té una velocitat v' = 10 m/s. De resultes d'això el pèndol es separa un angle de 45^o de la vertical. Calcula:

a) La massa del pèndol.
b) La tensió del fil immediatament després del xoc.



a) Calculem primer l'altura h final del pèndol quan α = 45^o:

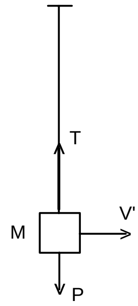
$$h = l - l\cos\alpha = 1{,}2 - 1{,}2\cdot\cos 45^o = 0{,}351 \ m$$

I, per energies, calcularem la velocitat de la massa M immediatament després del xoc. Quan M puja es conserva l'energia perquè no hi ha forces dissipatives. (Hi ha el pes i la tensió del fil)

$$U_{p,\,final} = U_{c,inic} \ \rightarrow \ Mgh = \frac{1}{2}MV'^2 \ \rightarrow \ V' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}351} = \sqrt{7{,}02} = 2{,}65 \ m/s$$

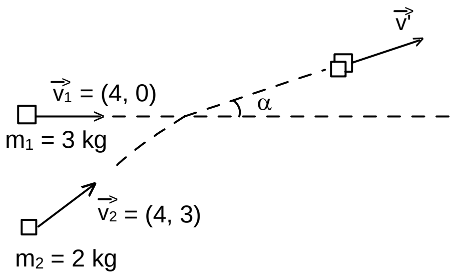
Com que en el xoc es conserva la quantitat de moviment, podem calcular la massa M del pèndol:

$$mv + MV = mv' + MV' \ \rightarrow \ M = \frac{mv - mv'}{V'} = \frac{0{,}2\cdot 40 - 0{,}2\cdot 10}{2{,}65} = 2{,}26 \ kg$$



b) La tensió del fil al punt més baix la trobem aplicant-hi la 2^a llei:

$$T - P = Ma_n \ \rightarrow \ T = M\frac{V'^2}{r} + Mg = 2{,}26\frac{7{,}03}{1{,}2} + 2{,}26\cdot 10 = 35{,}84 \ N$$



2. Els cossos de la figura xoquen i queden units. Calcula:
a) La velocitat final i l'angle α que es desvien. b) L'energia perduda en el xoc.

a) Es conserva la quantitat de moviment: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{3(4,\ 0) + 2(4,\ 3)}{3+2} = \frac{(20,\ 6)}{5} = (4,\ 1'2) \ m/s$$

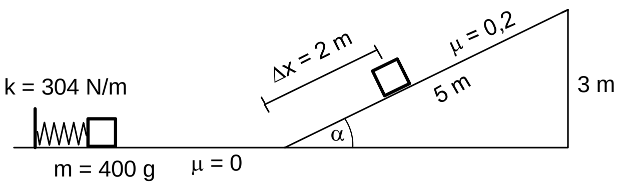
$$\alpha = arctg\frac{1{,}2}{4} = 16{,}7^o$$

b) $U_o = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}3\cdot 4^2 + \frac{1}{2}2\cdot 5^2 = 24 + 25 = 49 \ J$

$$U' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(3+2)(4^2 + 1{,}2^2) = \frac{1}{2}5\cdot 17{,}44 = 43'6 \ J \ \rightarrow \ \Delta U = U' - U_o = 43{,}6 - 49 = -5{,}4 \ J$$

---

3. Disparem un cos m = 400 g per un pla horitzontal sense fregament comprimint una molla de constant k = 304 N/m. El cos surt de la molla, recorre un tros pel pla horitzontal sense fregament i després puja un espai Δx = 2 m per un pla inclinat. Aquest pla inclinat té una longitud de 5 m i una altura de 3 m amb un fregament μ = 0,2. Després el cos torna a baixar. Calcula: a) La força amb què hem comprimit la molla per disparar el cos.
b) El tros que es comprimirà la molla quan el cos baixi i hi torni a xocar i la força necessària.



Primer hem de conèixer l'angle α: $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\cos\alpha = \cos(\arcsin 0{,}6) = 0{,}8$

a) Farem servir energies: Força de fregament: $F_f = \mu F_n = \mu mg\cos\alpha = 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}8 = 0{,}64 \ N$

Treball perdut en fregament: $W_f = F_f\Delta x = 0{,}64\cdot 2 = 1{,}28 \ J$

Energia potencial final: $U_p = mgh = mg\cdot\Delta x\cos\alpha = 0{,}4\cdot 10\cdot 2\cdot 0{,}6 = 4{,}8 \ J$

L'energia inicial total és: $U = W_f + U_p = 1{,}28 + 4{,}8 = 6{,}08 \ J$

Aquesta és l'energia que li ha donat la molla. És l'energia elàstica que tenia la molla quan estava comprimida. Ja podem calcular el tros d que s'ha hagut de comprimir i la força F necessària.

$$U_{elàst} = \frac{1}{2}kd^2 \rightarrow d = \sqrt{\frac{2 \cdot U_{elàst}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}08}{304}} = 0{,}2 \ \ m = 20 \ \ cm \rightarrow F_{el} = kd = 304 \cdot 0{,}2 = 60{,}8 \ \ N$$

b) L'energia que tindrà el cos quan torni a xocar amb la molla serà la potencial U_p que té a dalt menys la que perd per fregament en baixar. Aquesta energia es convertirà en energia elàstica:

$$U_{elast.} = U_p - W_f = 4{,}8 - 1{,}28 = 3{,}52 \ \ J$$

El tros que es comprimirà la molla és: $d' = \sqrt{\frac{2 \cdot U'_{elàst}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}52}{304}} = 0{,}152 \ \ m = 15{,}2 \ \ cm$

I la força màxima necessària: $F' = kd = 304 \cdot 0{,}152 = 46{,}21 \ \ N$

També podíem haver calculat la velocitat amb què el cos surt de la molla, sabent que puja 2 m pel pla inclinat:

$$F_t = mg \sin\alpha = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 0{,}6 = 2{,}4 \ \ N \quad \text{i} \quad F_f = 0{,}64 \ \ N \rightarrow a = \frac{-F_t - F_f}{m} = \frac{-2{,}4 - 0{,}64}{0{,}4} = -7{,}6 \ \ m/s^2$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x \rightarrow v_o^2 = v^2 - 2a\Delta x = 0 - 2(-7{,}6)2 = 30{,}4 \ \ m^2/s^2$$

I, amb la velocitat, l'energia cinètica del cos que és l'elàstica que tenia la molla

$U_{elast} = U_c = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}0{,}4 \cdot 30{,}4 = 6{,}08 \ \ J$ i, com abans; $d = \sqrt{\frac{2 \cdot U_{elàst}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}08}{304}} = 0{,}2 \ \ m = 20 \ \ cm$

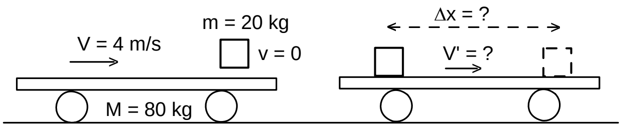
Al baixar, l'acceleració és:

$a = \frac{F_t - F_f}{m} = \frac{2{,}4 - 0{,}64}{0{,}4} = 4{,}4 \ \ m/s^2$ i la velocitat final: $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x = 0 + 2 \cdot 4{,}4 \cdot 2 = 17{,}6 \ \ m^2/s^2$

$U'_{elast} = U_c = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}0{,}4 \cdot 17{,}6 = 3{,}52 \ \ J$ i, com abans: $d' = \sqrt{\frac{2 \cdot U'_{elàst}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}52}{304}} = 0{,}152 \ \ m = 15{,}2 \ \ cm$

---

4. Una vagoneta plana té una massa M = 80 kg i va a V = 4 m/s. Ara li posem al cim un paquet de massa m = 20 kg. Calcula la el tros Δx que el paquet llisca pel cim de la vagoneta si hi ha un fregament de coeficient μ = 0,4



És un xoc inelàstic. Calcularem la velocitat del conjunt després del xoc fent servir que la quantitat de moviment es conserva:

$$MV + mv = (M+m)V' \rightarrow V' = \frac{MV}{M+m} = \frac{80 \cdot 4}{80+20} = 3{,}2 \ \ m/s$$

Ara ja podem calcular l'energia que es perd en el xoc:

$$U_{c,o} = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}80 \cdot 4^2 = 640 \ \ J$$

$$U' = \frac{1}{2}(M+m)V'^2 \ \frac{1}{2}(80+20)3{,}2^2 = 512 \ \ J$$

$$\rightarrow \quad \Delta U = U' - U_o = 512 - 600 = -128 \ \ J$$

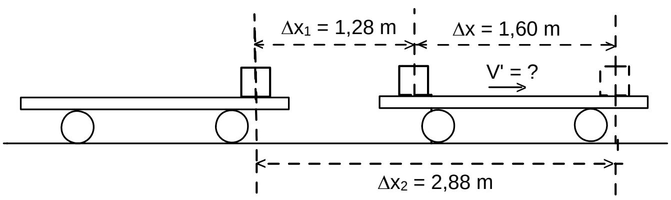
Aquesta energia perduda és el treball de fregament que fa el cos m lliscant pel cim de la vagoneta. La força de fregament és:

$F_f = \mu mg = 0{,}4 \cdot 20 \cdot 10 = 80 \ \ N$ → el treball: $W = F_f \Delta x$ → i el tros: $\Delta x = \frac{W_f}{F_f} = \frac{128}{80} = 1{,}6 \ \ m$

També ho podíem haver fet amb la 2ª llei. L'aplicarem per separat, primer al paquet i després a la vagoneta:
La força de fregament accelera el paquet endavant i la velocitat passa de $v_o = 0$ a v = 3,2 m/s

L'acceleració és: $a = \frac{F_f}{m} = \frac{80}{20} = 4 \ \ m/s^2$ i el paquet recorre un tros: $\Delta x_1 = \frac{V'^2 - v_o^2}{2a} = \frac{3{,}2^2 - 0}{2 \cdot 4} = 1{,}28 \ \ m$

Aquesta mateixa força de fregament frena la vagoneta amb una acceleració: $a = \frac{-F_f}{M} = \frac{-80}{80} = -1 \ \ m/s^2$



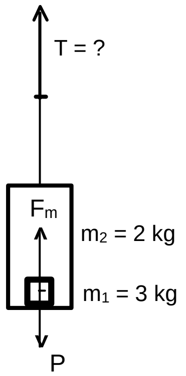
i l'espai recorregut és:

$$\Delta x_2 = \frac{V^2 - V'^2}{2a} = \frac{3{,}2^2 - 4^2}{2(-1)} = 2{,}88 \ \ m$$

La diferència és el tros que el paquet llisca pel cim de la vagoneta: $\Delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1 = 2{,}88 - 1{,}28 = 1{,}60 \ m$

---

5. Un cos de massa m_1 = 3 kg està posat a dins d'una caixa de massa m_2 = 2 kg penjada en un fil i així el conjunt es mou en direcció vertical. La força mútua que es fan és de 36 N. Calcula la tensió del fil.



El cos m_1 només rep la força mútua F_m i el pes P_1. La força F_m que rep m_1 només pot tenir sentit cap amunt. Tenim que el pes P = mg = 3·10 = 30 N té sentit cap avall.

Com que F_m = 36 N → $F_m > P_1$ veiem que m_1 puja accelerant i, per tant, el conjunt també.

Calculem l'acceleració aplicant la 2ª llei a m_1 : $a = \frac{F_m - P_1}{m_1} = \frac{36-30}{3} = 2 \ m/s^2$

I ara la 2ª llei al conjunt per trobar la tensió del fil:

$$T - P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a \ \rightarrow \ T = (m_1 + m_2)a - P_1 - P_2 = (3+2)2 + 3\cdot 10 + 2\cdot 10 = 60 \ N$$
