Constants: G = 6,7·10^{-11} N·m^2/kg^2; M = 6·10^{24} kg; R = 6.400 km; g = -9,8 m/s^2. K = 9·10^9 n·m^2/C^2

1. Un cos de massa m = 40 kg està en repòs a la superfície de la terra. Ara li fem una força vertical F = 200 N constant i el pugem amunt. La força actua fins que l'altura és tres vegades el radi de la terra i llavors para d'actuar. Calcula, per l'instant en què la força plega d'actuar,

a) El treball fet per la força F i l'energia potencial que ha rebut el cos.
b) La velocitat que té el cos.
c) Fes càlculs per saber si el cos arribarà a sortir del camp gravitatori i la velocitat que tindria si en sortís.

a) Calculem primer el treball que ha rebut el cos: $W = F\cdot\Delta y = F\cdot 3R = 200\cdot 3\cdot 6{,}4\cdot 10^6 = 3{,}84\cdot 10^9\ J$

Ara l'augment d'energia potencial.

La inicial quan era a terra és: $U_{p,o} = -G\dfrac{Mm}{R} = -6{,}7\cdot 10^{-11}\dfrac{6\cdot 10^{24}.4}{6{,}4\cdot 10^6} = -2{,}5125\cdot 10^8\ J$

i la final quan la força plega: $r = R + h = R + 3R = 4R$ → $U_p = -G\dfrac{Mm}{4R} = \dfrac{1}{4}U_{p,o} = \dfrac{1}{4}(-2{,}5125\cdot 10^8) = -6{,}28125\cdot 10^7\ J$

La que ha rebut serà la diferència: $\Delta U_p = U_p - U_{p,o} = -6'28125\cdot 10^7 - (-2{,}5125\cdot 10^8) = 1{,}8843\cdot 10^8\ J$

b) El treball que ha rebut ha servit per augmentar l'energia potencial i donar-li energia cinètica. L'energia cinètica serà la diferència entre el treball rebut i l'augment d'energia potencial::

$$U_c = W - \Delta U_p = 3{,}84\cdot 10^9 - 1{,}8843\cdot 10^8 = 3{,}65157\cdot 10^9\ J$$

La velocitat: $U_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ → $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 3{,}65157\cdot 10^9}{4}} = 42.729{,}2\ m/s$

c) A fora del camp, l'energia potencial és zero. Per portar el cos fora del camp caldrà donar-li una energia potencial igual que la inicial i de signe contrari. Ja l'hem calculada abans: $\Delta U_p = G\dfrac{Mm}{R} = 2{,}5125\cdot 10^8\ J$

L'energia cinètica que té el cos fora del camp la trobarem restant del treball que la força F ha donat al cos, l'augment d'energia potencial:

$$U_c = W - \Delta U_p = 3{,}84\cdot 10^9 - 2{,}5125\cdot 10^8 = 3{,}58875\cdot 10^9\ J$$

I la velocitat és: $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 3{,}58875\cdot 10^9}{4}} = 42.360\ m/s$

<u>Podíem fer els càlculs de l'energia potencial amb g i R:</u>

La inicial quan era a terra és: $U_{p,o} = -G\dfrac{Mm}{R} = -g\dfrac{R^2 m}{R} = -gRm = -9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 4 = -2{,}5088\cdot 10^8\ J$

I quan la força plega d'actuar: $U_p = -G\dfrac{Mm}{4R} = -g\dfrac{R^2 m}{4R} = -\dfrac{1}{4}gRm = -\dfrac{1}{4}9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 4 = -\dfrac{1}{4}2{,}5088\cdot 10^8\ J = -6{,}2721\cdot 10^7\ J$

a) L'augment d'energia potencial serà la diferència: $\Delta U_p = U_p - U_{p,o} = -6'2721\cdot 10^7 - (-2{,}5088\cdot 10^8) = 1{,}8816\cdot 10^8\ J$

b) L'energia cinètica: $U_c = W - \Delta U_p = 3{,}84\cdot 10^9 - 1{,}8816\cdot 10^8 = 3{,}65184^9\ J$

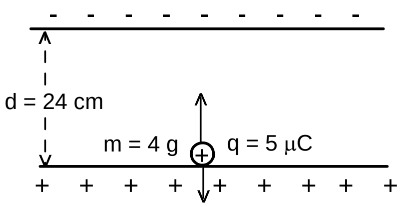
I la velocitat $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 3{,}65184\cdot 10^9}{4}} = 42.730{,}8\ m/s$

c) Quan surt fora del camp: $U_p = G\dfrac{Mm}{R} = gRm = 9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 4 = 2{,}5088\cdot 10^8\ J$

$$U_c = W - \Delta U_p = 3{,}84\cdot 10^9 - 2{,}5088\cdot 10^8 = 3{,}58912\cdot 10^9\ J$$

La velocitat com abans: $v = \sqrt{\dfrac{2U_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 13{,}58912\cdot 10^9}{4}} = 42.362\ m/s$

2. Un condensador pla horitzontal té una distància entre les plaques d = 24 cm. La placa positiva és a baix i ara hi col·loquem a sobre una partícula de massa m = 4 g carregada amb una càrrega q = 5 μC. El camp elèctric la fa pujar i en 0,2 segons la partícula arriba a la placa negativa. Calcula:



a) La velocitat final i la força elèctrica que fa pujar la partícula. (Cal tenir en compte que també hi ha el pes)

b) La intensitat de camp entremig de les plaques i la diferència de potencial del condensador.

c) Totes les energies a l'estat inicial i a l'estat final, amb tots els decimals. Comprova que l'energia total es conserva.

a) Per cinemàtica calcularem l'acceleració de pujada. Forces constants → MRUV

$y_o = 0$; $v_o = 0$ → $y = \frac{1}{2}at^2$ → $a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2 \cdot 0{,}24}{0{,}2^2} = 12 \ m/s^2$ → $v = at = 12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4 \ m/s$

Ara la 2ª llei: $F - P = ma$ → $F = mg + ma = 0{,}004 \cdot 10 + 0{,}004 \cdot 12 = 0{,}088 \ N$

b) La intensitat de camp elèctric: $E = \frac{F}{q} = \frac{0{,}088}{5 \cdot 10^{-6}} = 17.600 \ N/C$

i la diferència de potencial: $V = Ed = 17.600 \cdot 0{,}24 = 4.224 \ V$

c) Energies: Estat inicial:

$U_p(gravitatòria) = 0$, $U_p(elèctrica) = qV = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4.224 = 0{,}02112 \ J$, $U_c = 0$

$$U_{total} = 0 + 0{,}02112 + 0 = 0{,}02112 \ J$$

Estat final:

$U_p(gravitatòria) = mgh = 0{,}004 \cdot 10 \cdot 0{,}24 = 0{,}0096 \ J$, $U_p(elèctrica) = 0$, $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0{,}004 \cdot 2{,}4^2 = 0{,}01152 \ J$

$$U_{total} = 0{,}0096 + 0 + 0{,}01152 = 0{,}02112 \ J$$

---

3. Calcula la velocitat d'un satèl·lit de massa m = 200 kg i l'energia que s'ha necessitat per col·locar-lo en òrbita si l' altura és de 5.600 km.

El radi de l'òrbita del satèl·lit és: $r = R + h = 6.400 + 5.600 = 12.000 \ km = 1{,}2 \cdot 10^7 \, m$

Amb la 2ª llei per un MCU i la llei de gravitació universal, podem calcular la velocitat:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}7 \cdot 10^{-11} 6 \cdot 10^{24}}{1{,}2 \cdot 10^7}} = \sqrt{3{,}35 \cdot 10^7} = 5.787{,}92 \ m/s$$

Ara l'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 3{,}35 \cdot 10^7 = 3{,}35 \cdot 10^9 \ J$

I la potencial: $U_p = -G\frac{Mm}{r} - 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{1{,}2 \cdot 10^7} = -6{,}7 \cdot 10^9 \ J$

La que tenia inicialment quan era a terra: $U_p = -G\frac{Mm}{R} - 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{6{,}4 \cdot 10^6} = -1{,}25625 \cdot 10^{10} \, J$

I la necessària per col·locar-lo en òrbita:

$$\Delta U = U_{total-final} - U_{potencial-inicial} - 3{,}35 \cdot 10^9 - (-1{,}25625 \cdot 10^{10}) = 9{,}2125 \cdot 10^9 \ J$$

També hauríem pogut començar calculant l'energia potencial: $U_p = -G\frac{Mm}{r} - 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{1{,}2 \cdot 10^7} = -6{,}7 \cdot 10^9 \ J$

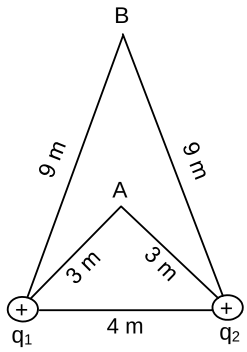
la cinètica: $U_c = -\frac{1}{2}U_p = \frac{1}{2}6{,}7 \cdot 10^9 = 3{,}35 \cdot 10^9 \ J$ i la velocitat: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}35 \cdot 10^9}{200}} = 5.787{,}92 \ m/s$

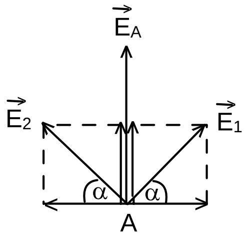
---

4. Un camp elèctric és creat per dues càrregues puntuals positives iguals $q_1 = q_2 = 5\ \mu C$. distants entre elles 4 m.

a) Calcula la intensitat de camp i el potencial en un punt A situat a 3 m de la primera i a 3 m de la segona.

b) Ara col·loquem al punt A una partícula de massa m = 8 mg, carregada amb $q = 2\ \mu C$. El camp la repel·leix. Calcula la velocitat quan passa pel punt B, a 9 metres de les càrregues creadores del camp.





a) Ja veiem que els mòduls de les intensitats de camp són iguals perquè $q_1 = q_2$ i $r_1 = r_2$:

$$E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{r_1^2} = 9{\cdot}10^9\ \frac{5{\cdot}10^{-6}}{3^2} = 5.000\ \ N/C$$

Per sumar aquests dos vectors, només cal descompondre'ls tal com tenim a la figura i veiem que ens queda:

$$\vec{E}_A = 2E_1 \sin\alpha = 2{\cdot}5.000\sin(\arccos\frac{2}{3}) = 7.453{,}56\ \ N/C$$

El potencial serà la suma de dos potencials iguals: $V_A = 2V_1 = 2k\frac{q_1}{r_1} 2{\cdot}9{\cdot}10^9\ \frac{5{\cdot}10^{-6}}{3} = 30.000\ \ V$

b) Necessitem el potencial del punt B: $V_B = 2V'_1 = 2k\frac{q_1}{r'_1} 2{\cdot}9{\cdot}10^9\ \frac{5{\cdot}10^{-6}}{9} = 10.000\ \ V$

i aplicar-hi que l'energia es conserva quan la partícula es mou de A a B:

$$U_{p,B} + U_{c,B} = U_{p,A} \quad \rightarrow \quad U_{c,B} = U_{p,A} - U_{p,B} = V_A{\cdot}q - V_B{\cdot}q = (V_A - V_B)q = (30.000 - 10.000)2{\cdot}10^{-6} = 0{,}04\ \ J$$

$$U_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \rightarrow \qquad v_B = \sqrt{\frac{2{\cdot}U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}0{,}04}{8{\cdot}10^{-6}}} = 100\ \ m/s$$