DINÀMICA 1: La resolució de problemes de moviment amb la segona llei.

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

A) Moviment d'un sol cos

La segona llei ens diu que l'acceleració $\vec{a}$ amb què es mou un cos és igual a la suma vectorial de les forces que rep el cos dividit per la massa del cos.
La pregunta que volem respondre quan tenim un problema de dinàmica és:

"com serà el moviment d'un cos si coneixem les forces que hi actuen?"

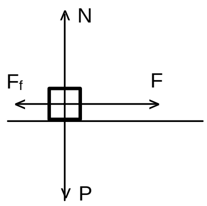
Per respondre-la haurem de fer els passos següents:

1. Mirarem les forces reals[1] que rep [2] el cos i les dibuixarem, posant el seu punt d'aplicació en el centre de masses del cos. Llavors el cos es comporta com si fos un punt sense volum.

2. Sumarem vectorialment aquestes forces i la resultant que obtinguem la dividirem per la massa del cos i així trobarem l'acceleració que, evidentment, tindrà la mateixa direcció i sentit que aquesta resultant. A partir d'aquí, per cinemàtica, ja podrem respondre totes les preguntes del problema. (Exemples 1, 2 i 3)

Però hi ha casos que no són tan immediats i cal seguir un altre camí. En comptes de sumar les forces que rep el cos les descompondrem en els dos components següents:
a) El que té la mateixa direcció que la velocitat del cos. D'aquesta en direm *força tangencial* ja que serà tangent a la trajectòria igual com la velocitat. Aquesta força farà variar el mòdul de la velocitat i, per tant, produirà l'anomenada acceleració tangencial a_t
b) El de direcció perpendicular a la velocitat. En direm *força normal* ja que és normal a la trajectòria. Aquesta força farà variar la direcció de la velocitat i per tant, produirà l'acceleració normal a_n
Aplicarem la segona llei per separat a cada direcció i així obtindrem les acceleracions del cos: la tangencial, la normal i , per Pitàgores, la total. (Exemples 4 i 5)

Exemple 1
Un cos de massa m = 2 kg està en repòs en un pla horitzontal. Entre el cos i el pla hi ha un fregament de coeficient μ = 0,3. Ara li fem una força F = 16 N paral·lela al pla. Calcula: a) El tros que ha recorregut el cos al cap de 6 segons i la velocitat que té. b) El temps que tarda a recórrer els primers 4 m i la velocitat final en aquest cas.



Les forces reals que actuen sobre el cos són quatre: la força F que fem nosaltres, la força de fregament F_f. que fa la superfície del pla horitzontal, el pes P que fa la terra i la normal N o resistència del pla horitzontal.

Ens és fàcil sumar les forces perquè el pes P i la normal N s'anul·len, ja que són iguals i de sentit contrari i només ens cal restar a la força F la de fregament F_f perquè són de la mateixa direcció i de sentit contrari . El cos es mou com si només hi hagués una sola força que és la resultant $F_r = F - F_f$

Calculem la força de fregament: $\boxed{F_f = \mu N}$ → $F_f = \mu N = \mu P = \mu m g = 0{,}3 \cdot 2 \cdot 10 = 6 \ \ N$

I l'acceleració amb la 2ª llei: $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$ → $a = \dfrac{F - F_f}{m} = \dfrac{16-6}{2} = 5 \ \ m/s^2$

Ara, per cinemàtica del MRUV, ja podem respondre les preguntes del problema.
a) El tros que recorre en 6 segons i la velocitat. Les constants del moviment són: $x_o = 0$, $v_o = 0$ i $a = 5$ m/s^2.
El tros que recorre coincideix amb la posició final:

$$\boxed{x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2} \quad \rightarrow \quad x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 5 \cdot 6^2 = 90 \ \ m$$

---

[1] Les forces d'inèrcia com ara la força centrífuga són forces de ficció, no són reals, s'anomenen falses forces. Ens seran útils en determinats casos més complicats. Aquí encara no. Per saber si una força és falsa només cal que mirem de trobar el cos que la fa i mai no el trobarem.
[2] D'acord amb la 3ª llei, si un cos fa una força (acció) a un altre cos, aquest respon fent una força igual i de sentit contrari (reacció) sobre el primer. Doncs bé, aquí només tindrem en compte les forces que rep el cos, és a dir, les que li fan els cossos del seu entorn no les que ell fa.

La velocitat final és:

$$\boxed{v = v_o + at} \rightarrow v = v_o + at = 0 + 5{\cdot}6 = 30 \ m/s$$

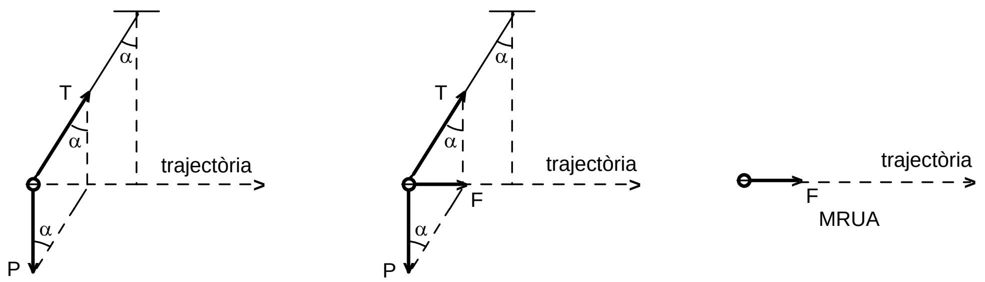
b) El temps que tarda a recórrer els primers 40 m:

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}40}{5}} = 4 \ s \quad \text{i la velocitat final:} \quad v = v_o + at = 0 + 5{\cdot}4 = 20 \ m/s$$

També hauríem pogut fer-ho així:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2a\Delta x} = \sqrt{0 + 2{\cdot}5{\cdot}40} = 20 \ m/s \quad \text{i} \quad v = v_o + at \rightarrow t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{20 - 0}{5} = 4 \ s$$

Exemple 2
Un cotxe parat arrenca i manté una acceleració constant durant 8 segons fent una trajectòria recta. Al sostre hi té penjat un pèndol que mentre dura l'acceleració fa un angle constant $\alpha = 14^o$ amb la vertical. Calcula la velocitat final del cotxe i l'espai recorregut en aquest temps.



Les forces reals que rep el cos només són dues: el pes P i la tensió del fil T.

Sumant vectorialment aquestes forces, obtenim la resultant que és una força F constant que produeix un moviment rectilini uniformement accelerat

Mirant la figura hi trobem tres angles α que són iguals perquè tenen els costats paral·lels i això ens permet de fer càlculs. La força F resultant o suma de totes les forces que rep el cos, la calcularem així:

$$tg\alpha = \frac{F}{P} \rightarrow F = P{\cdot}tg\alpha = mg{\cdot}tg\alpha$$

Ara, amb la 2ª llei, calcularem l'acceleració de la massa del pèndol que, evidentment, és la mateixa que la del cotxe:

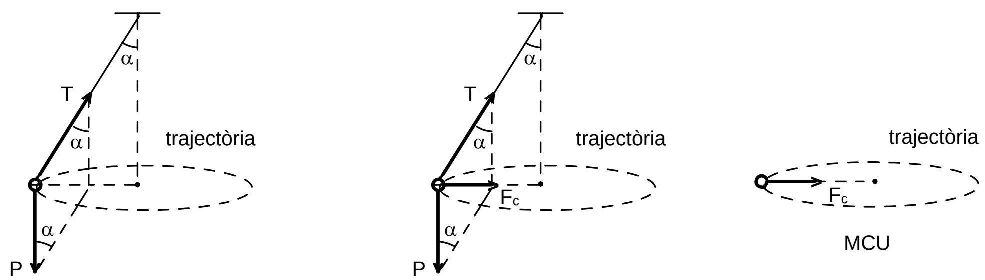
$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F}{m} = \frac{mg{\cdot}tg\alpha}{m} = g{\cdot}tg\alpha = 10{\cdot}tg14^o = 2{,}5 \ m/s^2$$

El càlcul de la velocitat final i l'espai recorregut és un problema de cinemàtica del moviment rectilini uniformement variat MRUV. Sabem: $x_o = 0$, $v_o = 0$ i $a = 2{,}5$ m/s^2.

$$\boxed{v = v_o + at} \rightarrow v = v_o + at = 0 + 2{,}5{\cdot}8 = 20 \ m/s$$

$$\boxed{x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2} \rightarrow x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}2{,}5{\cdot}8^2 = 80 \ m$$

Exemple 3
Un pèndol cònic té una massa m = 20 g i una longitud de 80 cm. Fa un moviment circular uniforme de radi 30 cm. Calcula la força centrípeta, l'acceleració normal, la tensió del fil i la freqüència de rotació en r.p.m.



Les forces reals que rep el cos només són dues: el pes P i la tensió del fil T.

Sumant vectorialment aquestes forces P i T, obtenim la resultant que és la força centrípeta F_c constant que produeix un moviment circular uniforme. El cos m ja té una velocitat de mòdul constant i la força F_c li és perpendicular i li produeix un canvi de direcció que és l'acceleració normal.

Aquí podem trobar fàcilment la força centrípeta resultant F_c perquè amb la figura veiem que es pot calcular l'angle α:

$$\alpha = \arcsin\frac{r}{l} = \arcsin\frac{30}{80} = 22^o$$

Amb el pes P, tindrem la força centrípeta F_c: $tg\alpha = \dfrac{F_c}{P}$ → $F_c = P \cdot tg\alpha = mg \cdot tg\alpha = 0{,}02 \cdot 10 \cdot tg22^o = 0{,}08\ \ N$

Ara, amb la segona llei, podem calcular l'acceleració normal: $a_n = \dfrac{F_c}{m} = \dfrac{0{,}08}{0{,}02} = 4\ \ m/s^2$

La tensió T del fil també la calcularem amb la figura per trigonometria:

$$\cos\alpha = \frac{P}{T} \rightarrow T = P \cdot \cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha = 0{,}02 \cdot 10 \cdot \cos 22^o = 0{,}185\ \ N$$

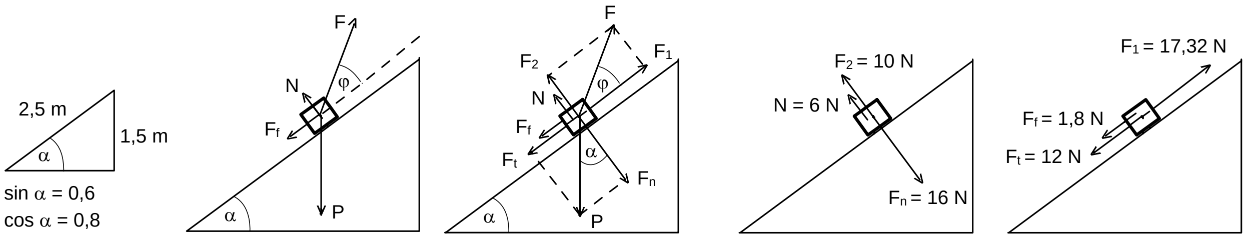
Per saber la freqüència ens cal saber primer la velocitat angular ω.

$$\boxed{a_n = \omega^2 r} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_n}{r}} = \sqrt{\frac{4}{0{,}3}} = 3{,}65\ \ rad/s$$

I ja tenim la freqüència en rpm: $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi}}$ → $f = \dfrac{\omega}{2\pi}60 = \dfrac{3{,}65}{2\pi}60 = 34{,}9\ \ rpm$

Exemple 4

Pugem un cos de massa m = 2 kg per un pla inclinat de 2,5 m de llarg i que arriba a una altura d'1,5 m, fent-li una força F = 20 N que fa un angle $\varphi = 30^o$ amb el pla inclinat. Hi ha un coeficient de fregament $\mu = 0{,}3$. Calcula l'acceleració de pujada, la velocitat quan arriba a dalt de tot i el temps que ha tardat a pujar.



Amb les dades del pla inclinat calculem $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Les forces reals que rep el cos són quatre: F que la fem nosaltres, F_f fregament de la superfície del pla, P pes, atracció de la terra i N la normal o resistència del pla. Hem descompost P i F en les direccions normal i paral·lela al pla inclinat.

Aplicant la 2ª llei a la direcció normal (o la 1ª llei), com que no hi ha moviment en aquesta direcció, la suma de forces és zero. Això ens permet de calcular la N i després la F_f. Per calcular l'acceleració de pujada ja veiem que només necessitem F_1, F_t i F_f.

Components de la força F:

$$F_1 = F\cos\varphi = 20 \cdot \cos 30^o = 17{,}32\ \ N \quad \text{i} \quad F_2 = F\sin\varphi = 20 \cdot \sin 30^o = 10\ \ N$$

Components del pes P:

$$F_t = P\sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}6 = 12\ \ N \quad \text{i} \quad F_n = P\cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}8 = 16\ \ N$$

La força normal N i la força de fregament Ff:

$$N = F_n - F_2 = 16 - 10 = 6\ \ N \qquad \boxed{F_f = \mu N} \rightarrow F_f = \mu N = 0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8\ \ N$$

Apliquem la 2ª llei a la direcció tangencial (paral·lela al pla) per calcular l'acceleració de pujada:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_1 - F_t - F_f}{m} = \frac{17{,}32 - 12 - 1{,}8}{2} = 1{,}76\ \ m/s^2$$

Ara per cinemàtica ja podem calcular la velocitat final i el temps de pujada:
Les constants del moviment són: $x_o = 0$, $v_o = 0$ i $a = 1{,}76\ m/s^2$.

$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x} \rightarrow v = \sqrt{v_o^2 + 2a\Delta x} = \sqrt{0 + 2 \cdot 1{,}76 \cdot 2{,}5} = \sqrt{8{,}8} = 2{,}97\ \ m/s^2$$

$$\boxed{v = v_o + at} \rightarrow \quad t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{2{,}97 - 0}{1{,}76} = 1{,}69 \ \ m/s^2$$

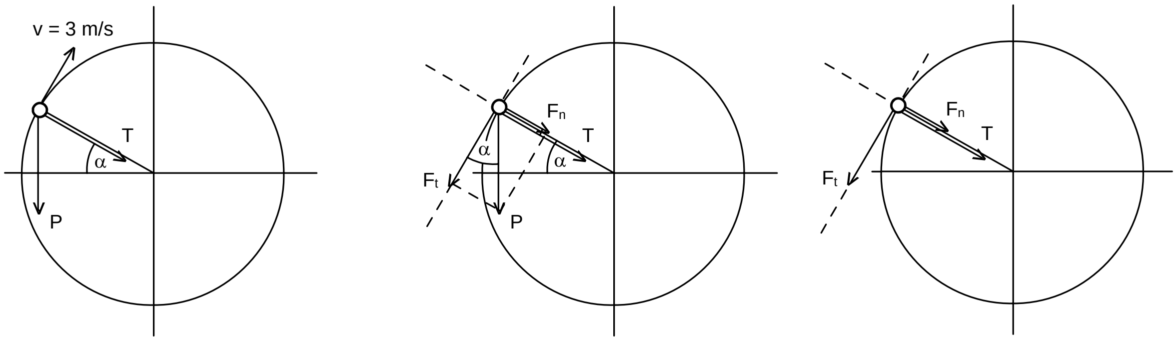
També podíem haver calculat primer el temps i després la velocitat:

$$\boxed{x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2} \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5}{1{,}76}} = 1{,}69 \ \ s$$

$$\boxed{v = v_o + at} \rightarrow \quad v = v_o + at \ = 0 + 1{,}76 \cdot 1{,}69 = 2{,}97 \ \ m/s$$

Exemple 5

Fem rodar un cos de massa m = 20 g lligat al capdavall d'un fil en un pla vertical. Quan el fil, pujant, fa un angle de $\alpha = 30^o$ amb l'horitzontal, la velocitat és v = 3 m/s. Calcula l'acceleració normal, la tangencial i la total en aquest instant i dibuixa-les juntament amb la velocitat.



Les forces reals que rep el cos només són dues: el pes P i la tensió del fil T.

Descomponem el pes en els dos components, el tangencial F_t i el normal F_n. El tangencial farà variar el mòdul de la velocitat (acceleració tangencial) i el normal sumat a la tensió del fil seran la força centrípeta que farà variar la direcció. (acceleració normal)

Components del pes P = mg:

$$F_t = P \cdot \cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha = 0{,}02 \cdot 10 \cdot \cos 30^o = 0{,}173 \ \ N$$

$$F_n = P \cdot \sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha = 0{,}02 \cdot 10 \cdot \sin 30^o = 0{,}1 \ \ N$$

Per calcular el mòdul de l'acceleració tangencial aplicarem la 2^a llei a la direcció tangent.

$$a_t = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_t}{m} = \frac{mg \cdot \cos\alpha}{m} = g \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 30^o = 8{,}66 \ \ m/s^2$$

L'acceleració normal ja la podem calcular perquè sabem la velocitat i el radi: $a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{3^2}{0{,}8} = 11{,}25 \ \ m/s^2$

Ara amb la 2^a llei a la direcció normal trobarem la tensió del fil:

$$\boxed{\sum F_n = m a_n} \rightarrow \quad F_n + T = m a_n \quad \rightarrow \quad T = m a_n - F_n = 0{,}02 \cdot 11{,}25 - 0{,}1 = 0{,}125 \ \ N$$

Amb el teorema de Pitàgores calcularem el mòdul de l'acceleració total:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{8{,}66^2 + 11{,}25^2} = 14{,}2 \ \ m/s^2$$

Per dibuixar les acceleracions només cal tenir present que tenen la mateixa direcció i sentit que les forces que les originen: