DINÀMICA 2: La resolució de problemes de moviment amb la segona llei.

B) Moviment de dos o més cossos en contacte o units amb un fil

1. La tercera llei de Newton

Ara que estudiarem el moviment de dos cossos que es fan una força mútua, farem un cop d'ull a la 3^a llei. Se'n diu el principi d'acció i reacció. Es sol enunciar així:

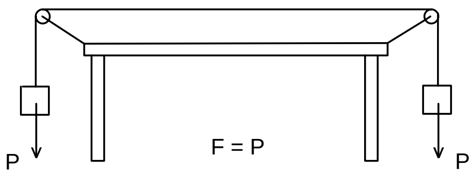
> *"Quan un cos fa una força (acció) a un altre cos, aquest contesta amb una força igual i de sentit contrari (reacció) feta sobre el primer".*

Si ens hi fixem bé, aquesta llei, que més aviat que llei, és una observació o un comentari, ens diu moltes coses.

1. Perquè existeixi una força, cal que hi hagi dos cossos, el que la fa i el que la rep.
2. Però si el que la rep contesta sempre amb una d'igual i de sentit contrari, vol dir que una força tota sola no pot existir. Les forces sempre van de dues en dues.
3. De qualsevol de les dues forces en podem dir acció i l'altra serà la reacció.

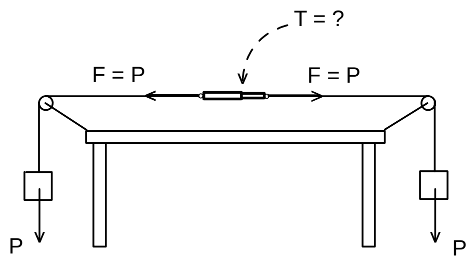
Quan fem l'estudi del moviment de dos cossos que estan en contacte i una força els empeny o units amb un fil i una força els estira, a més de les forces que reben dels cossos de l'entorn, com ara la força F que els mou, el pes P, el fregament F_f , la resistència del pla N, etc, hi ha una altra força, la mútua F_m, que es fan entre ells i que si es fa a través d'un fil, se'n diu tensió T del fil. Diem *una* força mútua però de fet són dues, iguals i de sentit contrari, una a cada cos.
Abans de fer problemes de moviment, estudiarem l'exemple següent:

Exemple 1
Posem una politja a cada extrem d'una taula i hi fem passar un fil. A cada cap del fil hi pengem un cos de 400 g. Digues quina tensió té el fil.



P = mg = 0,4·10 = 4 N

Per saber la tensió del fil, hi posem un dinamòmetre. Què marca el dinamòmetre? Tria una d'aquestes possibilitats.



a) Com que són dues forces iguals i de sentit contrari, s'anul·len i el dinamòmetre senyala zero,

$$T = 0.$$

b) Com que un cos l'estira amb una força F = P = 4 N i l'altre també, són dues forces que es sumen.
El dinamòmetre senyala 8 N.

$$T = 2\,P = 2 \cdot 4 = 8\ \text{N}$$

c) Quan diem que es fa una força en realitat se'n fan dues. Aquí hem de dir que es fa una força de 4 N.

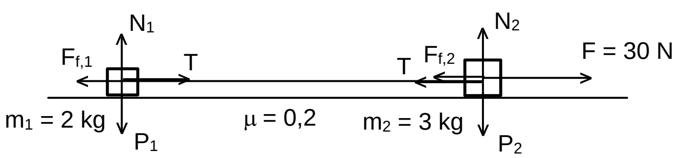
$$T = P = 4\ \text{N}$$

Ja veiem de seguida que la solució correcta és la c). Els pesos estiren el fil amb una força de 4 N. La 3^a llei ens diu que per fer una força cal realment fer-ne dues d'iguals i de sentit contrari.

Ja podem fer problemes de moviment

Exemple 2
Dos cossos m_1 = 2 kg i m_2 = 3 kg estan units amb un fil. Una força F = 30 N estira m_2. Hi ha un coeficient dinàmic de fregament μ = 0,2. Calcula la tensió del fil.

Per trobar l'acceleració quan una força mou dos o més cossos que estan en contacte o units amb un fil, dibuixarem, com sempre, totes les forces que reben, tenint present que ara hi haurà una força més a cada cos que és la força mútua F_m que es fan entre ells i que en direm tensió T si es fa a través d'un fil.



Calculem primer les forces de fregament: $F_{f,1} = \mu m_1 g = 0{,}2{\cdot}2{\cdot}10 = 4 \ N$, $F_{f,2} = \mu m_2 g = 0{,}2{\cdot}3{\cdot}10 = 6 \ N$

Ara apliquem la segona llei a cada cos i sumem les equacions resultants. És evident que: $a_1 = a_2 = a$

$$\left.\begin{array}{r} T - F_{f,1} = m_1 a \ [1] \\ F - T - F_{f,2} = m_2 a \ [2] \end{array}\right| \rightarrow F - F_{f,1} - F_{f,2} = (m_1 + m_2)a \ \rightarrow \ a = \frac{F - F_{f,1} - F_{f,2}}{m_1 + m_2} = \frac{30 - 6 - 4}{6 + 4} = 4 \ N \quad [3]$$

Aquesta fórmula final [3] ens diu que hem aplicat la 2ª llei a tot el sistema, [1] amb totes les forces exteriors i la suma de les masses. Podíem haver començat el problema calculant l'acceleració amb aquesta darrera expressió i continuar tal com ara farem: [2]

Amb l'equació [1] que és la 2ª llei del primer cos: $T = m_1 a + F_{f,1} = 2{\cdot}4 + 4 = 12 \ N$

i amb l'equació [2] que és la 2ª llei del segon cos: $T = F - F_{f,2} - m_2 a = 30 - 6 - 3{\cdot}4 = 12 \ N$

Surt el mateix valor de la T perquè és la mateixa força. És una única força que els cossos es fan mútuament.

> És interessant d'estudiar com s'han fet servir els 30 N de la força F. Fem-ho:
> Aquesta força F = 30 N fa les accions següents:
> 1) Dóna una acceleració a = 4 m/s^2 al cos m_2.= 3 kg Això vol dir una força $F_2 = m_2 a = 3{\cdot}4 = 12$ N
> Queden: 30 – 12 = 18 N.
> 2) Venç el fregament $F_{f,2} = 6$ N
> Queden: 18 – 6 = 12 N
> Aquests 12 N és la tensió del fil T. És una força que el fil transmet a l'altre cos m_1.
> 3) Dóna una acceleració a = 4 m/s^2 al cos m_1 = 2 kg. Això vol dir una força $F_1 = m_1 a = 2{\cdot}4 = 8$ N
> Queden: 12 – 8 = 4 N
> 4) Venç el fregament $F_{f,1} = 4$ N
> Força ha estat utilitzada completament: 4 – 4 = 0

---

2. Aplicació de la 2ª llei a tot el sistema

Per fer servir la 2ª llei, tant si es tracta d'un sol cos com si n'hi ha més, va bé considerar-la així:

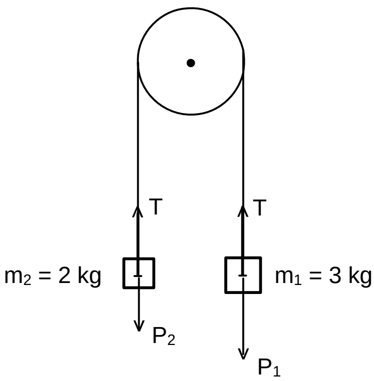
$$a = \frac{suma \ de \ forces \ que \ produeixen \ moviment \ - \ suma \ de \ forces \ que \ s'hi \ oposen}{suma \ de \ totes \ les \ masses \ del \ sistema}$$

Les forces les agafem positives (fem servir els mòduls de les forces) i suposant que la velocitat a l'inici del problema també és positiva o zero, l'acceleració que ens surti, portarà el seu propi signe i així veurem si el moviment és accelerat o retardat. Si guanyen les forces que mouen, l'acceleració serà positiva i el moviment serà accelerat, si guanyen les que s'hi oposen, l'acceleració serà negativa i el moviment inicialment serà retardat. En aquest darrer cas, les forces que s'hi oposen acabaran aturant el sistema i si continuen actuant, produiran un moviment accelerat en sentit contrari. Això darrer ho trobarem a l'Exemple 6

Exemple 3

Una corda passa per una politja penjada al sostre. Hi ha dos cossos penjats, un a cada cap, les masses són: m_1 = 3 kg i m_2 = 2 kg. Suposem que tant la politja com la corda no tenen massa. Calcula la tensió de la corda.

Primer hem de calcular l'acceleració amb què es mouen. Si prescindim del signe, l'acceleració és la mateixa per tots dos perquè estan units amb la corda. Podem aplicar-hi la segona llei directament a tot el sistema tal com hem dit a l'apartat 2.



$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{3 - 2}{3 + 2} 10 = 2 \ m/s^2$$

Aquí l'acceleració és positiva. Això vol dir que tots dos cossos tenen un moviment accelerat. Les velocitats les agafem totes dues com a positives i totes dues augmenten. Ara apliquem la 2ª llei a cada cos: [3]

---

[1] Sistema és el conjunt de cossos que hi ha en el problema i dels quals estudiem el moviment.

[2] D'aquesta fórmula [3] en parlarem a l'apartat 2: " Aplicació de la 2ª llei a tot el sistema".

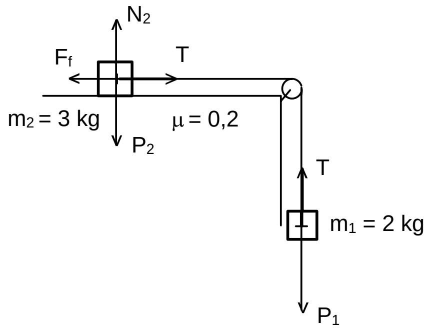
[3] També fem com abans: força que mou, menys força que s'hi oposa.

A m$_1$: $P_1 - T = m_1 a$ → $T = m_1 g - m_1 a = 3{\cdot}10 - 3{\cdot}2 = 24\ \ N$

A m$_2$: $T - P = m_2 a$ → $T = m_2 g + m_2 a = 2{\cdot}10 - 2{\cdot}2 = 24\ \ N$

Exemple 4

Un cos m_1 = 2 kg penja en un fil que passa per una politja i arrossega un altre cos m_2 = 3 kg que llisca per un pla horitzontal amb un fregament μ = 0,2. Calcula la tensió del fil.



Calculem primer la força de fregament: $F_f = \mu m_2 g = 0{,}2{\cdot}3{\cdot}10 = 6\ \ N$

i, com abans, apliquem la 2^a llei a tot el sistema per obtenir l'acceleració:

$$a = \frac{P_1 - F_f}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g - F_f}{m_1 + m_2} = \frac{2{\cdot}10 - 6}{2+3} = 2{,}8\ \ m/s^2$$

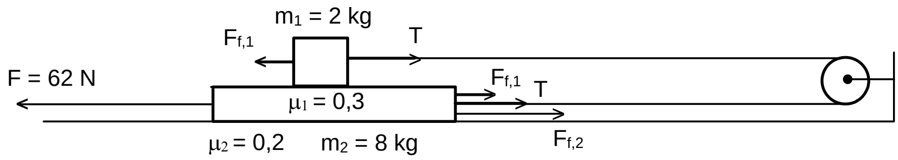
Ara la 2^a llei a cada cos i tindrem la tensió del fil:

A m$_1$: $P_1 - T = m_1 a$ → $T = m_1 g - m_1 a = 2{\cdot}10 - 2{\cdot}2{,}8 = 20 - 5{,}6 = 14{,}4\ \ N$

A m$_2$: $T - F_f = m_2 a$ → $T = F_f + m_2 a = 6 + 3{\cdot}2{,}8 = 14{,}4\ \ N$

Exemple 5

Una força F = 62 N mou el sistema de la figura estirant el cos m_2 = 8 kg. Aquest cos en té un altre al cim m_1 = 2 kg. Hi ha un fregament μ_1 = 0,3 entre els dos cossos i de μ_2 = 0,2 amb el terra. Calcula la tensió del fil.



Calculem les forces de fregament.

Primer la que fa el cos petit m_1 amb el gros m_2. Aquí la força normal N_1 és el pes P_1.

$$F_{f,1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 P_1 = \mu_1 m_1 g = 0{,}3{\cdot}2{\cdot}10 = 6\ \ N$$

Ara la que fa el gros m_2 amb el terra. És evident que la força normal N_2 serà la suma dels pesos P_1 i P_2:

$$F_{f,2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (P_1 + P_2) = \mu_2 (m_1 + m_2) g = 0{,}2{\cdot}(2+8){\cdot}10 = 20\ \ N$$

Apliquem la 2^a llei a tot el sistema:

$$F - F_{f,1} - F_{f,1} - F_{f,2} = (m_1 + m_2) a \quad \rightarrow \quad a = \frac{F - F_{f,1} - F_{f,1} - F_{f,2}}{m_1 + m_2} = \frac{62 - 6 - 6 - 20}{2+8} = 3\ \ m/s^2$$

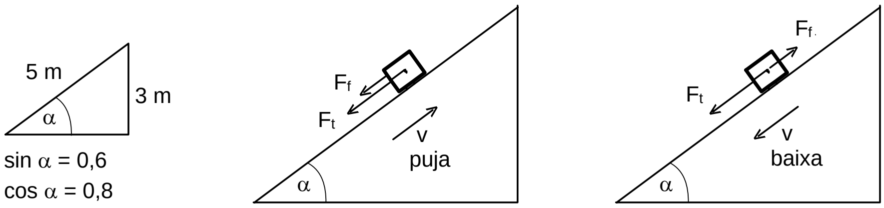
La força de fregament del petit amb el gros l'hi hem hagut de posar dues vegades perquè frena tots dos cossos. Això ho podem comprovar aplicant la 2^a llei a cada cos i sumant. Ho farem al mateix temps que busquem la tensió del fil:

2^a llei a m$_1$ $T - F_{f,1} = m_1 a$ → $T = m_1 a + F_{f,1} = 2{\cdot}3 + 6 = 12\ \ N$

2^a llei a m$_2$ $F - T - F_{f,1} - F_{f,2} = m_2 a$ → $T = F - m_2 a - F_{f,1} - F_{f,2} = 62 - 8{\cdot}3 - 6 - 20 = 12\ \ N$

Sumant: $F - F_{f1} - F_{f,1} - F_{f,2} = (m_1 + m_2) a$ → tenim l'expressió del planteig inicial.

Exemple 6
Des de baix de tot d'un pla inclinat de 5 m de llarg i que puja a una altura de 3 m, disparem un cos de massa m = 2 kg amb una velocitat v_o = 8 m/s. Hi ha un fregament de coeficient μ = 0,25. Calcula: a) L'acceleració, l'espai i el temps de pujada. b) L'acceleració, el temps i la velocitat final de baixada.



Amb les mides del pla inclinat hem trobat sin α i cos α i així ja podem calcular les forces resultants que actuen en el cos quan puja i quan baixa: [4]

$F_t = mg\sin\alpha = 2{\cdot}10{\cdot}0{,}6 = 12\ \ N \qquad F_n = mg\cos\alpha = 2{\cdot}10{\cdot}0{,}8 = 16\ \ N \qquad F_f = \mu F_n = 0{,}25{\cdot}16 = 4\ \ N$

a) Quan puja no hi ha cap força que mogui. Tots dues forces F_t i F_f s'hi oposen. La 2ª llei serà:

$$a = \frac{0 - F_t - F_f}{m} = \frac{-12-4}{2} = -8\ \ m/s^2$$

amb l'acceleració ja podem calcular, per cinemàtica, el temps i l'espai recorregut: (x_o = 0, v_o = 8 m/s, a = - 8 m/s²)

$$\boxed{v = v_o + at} \rightarrow\ t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{0-8}{-8} = 1\ \ s; \qquad x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 8{\cdot}1 + \frac{1}{2}(-8){\cdot}1^2 = 4\ \ m$$

o també: $$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x} \rightarrow\ \Delta x = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} = \frac{0-8^2}{2{\cdot}(-8)} = 4\ \ m$$

b) Quan baixa, F_t produeix el moviment i F_f s'hi oposa. La 2ª llei ara serà:

$$a = \frac{F_t - F_f}{m} = \frac{12-4}{2} = 4\ \ m/s^2$$

Calculem el temps i la velocitat final: (x_o = 0, v_o = 0, a = 4 m/s², x = 4 m)

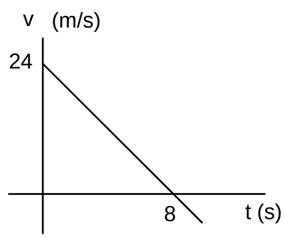
$$v = v_o^2 + 2a\Delta x = 0 + 2{\cdot}4{\cdot}4 = \sqrt{32} = 5{,}66\ \ m/s; \qquad v = v_o + at\ \rightarrow\ t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{5{,}66-0}{4} = 1{,}41\ \ s$$

---

3. El problema dels signes quan fem servir la 2ª llei
Es diu que quan el valor d'una magnitud es representa amb una lletra, per exemple l'acceleració de la gravetat amb la lletra g, aquesta lletra és com una capsa i a dins hi ha tres coses: el *signe* (–), el *valor numèric* (9,8 o 10) i les *unitats* (m/s²). Quan en una fórmula hi ha la magnitud g, volem dir: - 9,8 m/s² o -10 m/s².

Però, en la pràctica, a vegades, no és ben bé així. Per exemple:
Si fem servir la fórmula de la velocitat d'un MRUV: $v = v_o + gt$, aquí si que la g és $g = -9{,}8\ \ m/s^2$ o $g = -10\ \ m/s^2$ amb signe, valor numèric i unitats.
Emperò, si ens pregunten el pes d'un cos de massa m, farem el càlcul amb P = mg, i la g la farem servir sense signe i el valor del pes demanat el donarem positiu.
Anàlogament si ens pregunten l'energia potencial d'un cos de massa m que es troba a una altura h. La calcularem amb U_π = mgh i també donarem un resultat positiu. En aquests casos la g no conté cap signe o podem dir que l'hem suposat positiu.
Ara farem un problema de moviment de dos cossos en contacte i discutirem aquestes dues possibilitats de posar o no el signe a dins dels símbols de les magnituds.

Exemple 7
Una caixa de massa m_1 = 2 kg penjada en un fil té un cos de massa m_2 = 3 kg a dins. El conjunt es mou segons el gràfic. Calcula per t = 5 s: a) La tensió del fil. b) La força mútua entre el cos m_2 i la caixa m_1.



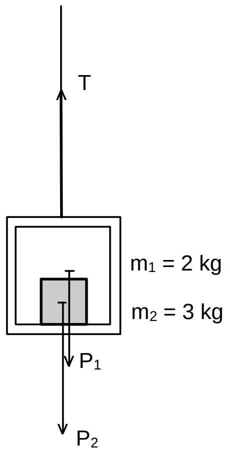
Ja veiem que la caixa amb el cos a dins pugen durant 8 s i es paren. El pendent del gràfic és l'acceleració. Calculem-la:

---

[4] El càlcul de les forces que actuen sobre un cos que es mou per un pla inclinat s'ha discutit a l'Exemple 4 de Dinàmica 01.

$$a=\frac{v-v_o}{t-t_o}=\frac{0-24}{8-0}=-3\ m/s^2$$

a) Per calcular la tensió del fil, hi dibuixem totes les forces i farem servir la 2^a llei. Ho podem fer de dues maneres:



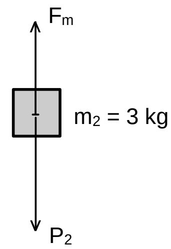
1.Com que el gràfic ens diu que el sistema puja frenant, ja veiem que ha de ser $P_1 + P_2 > T$, és a dir, les forces que tiren avall superen en mòdul a les que tiren amunt.
Agafarem totes les forces i l'acceleració amb signe positiu. La 2^a llei ens queda positiva a cada costat del signe igual, així:

$$P_1+P_2-T=(m_1+m_2)a \rightarrow T=m_1g+m_2g-(m_1+m_2)a=2\cdot10+3\cdot10-(2+3)3=35\ N$$

2. Ara ho farem *agafant tots els signes* de totes les acceleracions:

$$P_1+P_2+T=(m_1+m_2)a \rightarrow$$
$$T=(m_1+m_2)a-m_1g+-m_2g-=(2+3)(-3)-2\cdot(-10)-3\cdot(-10)=35\ N$$

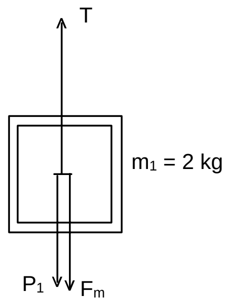
b) Per calcular la força mútua:
Aplicarem la 2^a llei al cos m_2.
De totes dues maneres:
1. Tot amb signes positius. Aquí veiem que $P_2 > F_m$ perquè, tal com hem dit abans, puja frenant. Tindrem:



$$P_2-F_m=m_2a \rightarrow F_m=m_2g-m_2a=3\cdot10-3\cdot3=21\ N$$

2. Tenint present tots els signes:

$$P_2+F_m=m_2a \rightarrow F_m=m_2a-m_2g=3\cdot(-3)-3\cdot(-10)=21\ N$$



També podem trobar la força mútua aplicant la 2^a llei a la caixa m_1:
1. Amb signes positius. Ara tenim que $P_1 + F_m > T$

$$P_1+F_m-T=m_1a \rightarrow F_m=m_1a-m_1g+T=2\cdot3-2\cdot(-10)+35=21\ N$$

2. Cada magnitud amb el seu signe:

$$T+P_1+F_m=m_1a \rightarrow F_m=m_1a-m_1g-T=2\cdot(-3)-2(-10)-35=-21\ N$$